易学精华书系

周易揲蓍

张图云◎著

教育部人文社会科学重点研究基地基金资助

四川出版集团
巴蜀书社

汉石经《周易》

题　记

《周易》筮术，源于远古，附为圣人之作，良有以也。观其筮，以筹策计数，依揲算起卦，据卦爻索辞，循易理释占，程序清晰，操作随机，人谋鬼谋，启示凶吉。探其微，其算至精，其术至巧，其思至密，其文至冥，其理至深，其容至广，历数千年不衰，令万千人惊奇。于是儒学得经，道家得法，更有星历推步，数算音律，炼丹医药，百工技术，莫不援《易》为典，以正传承。《易》以数起，衍为万物，奇偶阴阳，周流天地，五行生克，罗络四季，错综变幻，其数不乱，玄奥之余，载信载息。于是历代学人，各有阐释，人伦哲理，遗言古义，易学演绎，图书太极，延绵两千余年，著作无数。吾儿愚钝，难通大论，虽属意其中数算，也只能浅涉一隅，惟揲扐精准，卦爻分明，其中逻辑数理，自应成之有据，乃勉力推求，以证其真，反复比较，始信其优，更思西周数学，今人所知尚少，如此珍贵例证，应当征询于方家，故有作焉。幽谷笨鸟，试作一啼，嘤其鸣矣，求其友声，误推错断，在所不免，周爰咨询，祈君赐正。是为记。

庚寅立秋　黄绛珠※　于贵阳

※注：黄绛珠教授是本书作者的母亲，祖藉浙江余姚，乃黄宗羲族裔。她自幼聪颖，学养甚佳，现虽年开十秩，但思绪清晰。在本书的写作过程中，笔者每章草就必先送阅，相互之间常有讨论，裨益甚多。

前言

出于兴趣和好奇，笔者曾对《周易》占筮术中的一些数学问题做了探讨，先后写成几篇文稿。随着积累的资料渐多，便又写成《周易中的数学——揲扐算法研究》一书，由贵州科技出版社于2008年4月出版。以此为基础，经过整理和改写，于是有了这本小书。

本书的内容源于《周易》占筮术，但并不讨论占筮话题——既不涉及“算命”，也不涉及“预测”。《周易》占筮术是一种古老的“数占”，即根据某种算法的计算结果对人事的吉凶进行占测。由于与数有关，因而在这种独特的算法中蕴含了一些古代的数学信息，值得后人研究。本书便专门探讨《周易》占筮术中出现于先秦时期的一些主要的数学问题，自然也会涉及中国古代数学史中与商周数学相关的部分内容。

时下研究《周易》的书籍很多，说明人们很是关注中华民族的传统文化。不过，这些书籍大都偏“文”，或者说多与哲学、历史、文字等学科有关，而少有偏“理”的作品，尤其缺少偏重于数学的专著，笔者所见仅有沈宜甲先生写的《科学无玄的周易》等不多的几种。另一方面，在研究中国古代数学史的书籍中，除1998年吴文俊先生主编的《中国数学史大系·第一卷》之外，详细论及《周易》中数学问题的著作也不多见。形成这种状况的原因是多方面的，长期以来未能用现代数学方法较全面地解读一般性的揲扐算法规律便是可能的原因之一。这里的“揲”（音 shé）是按一定的规则用手点数并取出蓍草筹策，而“扐”（音 lè）则是将揲余的蓍草或筹策夹于手指之间的操作。占筮时通常用蓍草的茎或竹签状的筹策做计算工具，由于具体计算的过程以“揲”“扐”操作为特征，所以不妨将这种特殊的计算方法称为揲扐算法，简称揲算。

揲算是西周占筮家们出于占筮的需要而发明的一种求数算法，用现代数学的语言来说，这是一则初等数论范畴内的特殊真命题。由于数学能力毕竟有限，古代占筮家们肯定不是通过建立一般性命题的途径才发明出这种特殊算法的。但对于我们来说，弄清这则命题的内容，找到揲算模式下一般性命题的描述方式，将有助于更全面地认识《周易》占筮术，也有助于了解西周数学的发展和应用状况，因而应该是一件有意义的工作。

本书第1章对《周易》占筮术及其文本作了简要的介绍，第2章讨论了与八卦和

六十四卦有关的一些数学特点，而对《易》占成卦时所用的揲算方法予以说明，则是第 3 章的主要目的。

用现代数学方法归纳出一般性的揲算命题并予以证明，是第 4 章的任务，也是本书的核心内容。笔者对这一课题的探讨文稿《周易筮法模式下的揲扐计算通用公式》被《贵州教育学院学报》2006 年第 4 期刊用。以此为基础，在对相关命题的表述和证明作了一些更正和改进之后，形成了较为准确和完整的一套揲算理论。其中的定理 5 便是对揲算一般性命题的一种数学描述：

> 参揲总策数 $S=(R+2C)M+K$ 时，可以按《周易》占筮术的揲算模式进行分 2、挂 1、揲 M 的计算，经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R,R+1,\cdots,R+C\}$。其中 $(3-M)\leqslant K\leqslant 1$；$C=1$ 时，$M\geqslant 2$；$C>1$ 时，$M\geqslant 3$。

这样，除了分 2 和挂 1，与揲算相关的其他参数都用代数符号做了公式化的处理，因而具有一般性。一般性揲算定理的建立为我们从数学的角度深入研究《周易》占筮术创造了一定的条件。

本书第 5 章和第 6 章的内容涉及概率计算方面的一些问题。笔者在文稿《周易揲扐算法结果数的出现概率及考古应用》（载《贵州教育学院学报》2007 年第 5 期）中计算了揲算结果数的出现概率，给出了用《周易》行占情形下四个主要的概率指标。笔者将这一成果应用于考古学研究，为历代学者关于《左传》《国语》中的《周易》占例采用了传世揲算和变卦规则的推测提供了一个来自数学领域的佐证。类似地，又用这些概率指标核验了近几十年来出土的三批战国竹简中的占筮记录，为这些占筮都是用《周易》行占的推测提供了佐证。

本书最后两章的内容主要是中国古代数学史中与商周数学有关的一些探讨。在归纳建立了一般性揲算命题的基础上，通过对同类算法的对比研究，发现揲算竟然是所有同类算法中最能满足占筮要求的一种算法。由于资料的缺乏，长期以来，人们对揲算的发明过程难于展开研究，也难于对揲算的发明是一种“偶然的凑巧”的猜测做出判断。根据一般性揲算命题展开的较为全面的对比研究表明，揲算的发明是古代占筮家们在长期的占筮应用中逐渐优选出的一种求数算法，不是某个圣人的偶然发明。在揲扐操作加程序化的模式下，揲算的最后定型集聚了西周占筮家们的数学智慧，它不但促成了中国传统的卜筮文化基本形态的形成，而且从一个侧面显示了西周数学发展及应用的状况。

甲骨文的发现使我们对商代的数学水平有了许多具体的了解，但是关于西周数学的状况我们仍然知之甚少。在中国古代数学史的已有记录中，西周时期，除了商代传袭下来的数学知识，由周人发展形成的数学成果则寥寥无几。虽然有的学者认为西周时期已出现了一些《周礼》“九数”所说的实用型的算法设计，但是由于举不出具体的例证而显得缺乏足够的说服力。另一方面，也许是因为缺乏对揲算的深入研究，一些学者将其视为“一个四则运算的例子”（邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》，河北科技出版社，2001 年 9 月版，第 110 页），弱化了从数学的角度研究揲算的价值。按照

这种处理方式，甚至可以认定其数学内涵超不过商代的水平，进而得出揲算在“数学发展史上已没有意义，现代一般的数学史著作不提及”（朱伯崑《周易知识通览》，齐鲁书社，1993年12版，第741页）的结论。本书不是将揲算拆解为简单的四则运算来看待，而是将其归纳为一则初等数论范畴内的算法命题，于是我们看到了一套有着严密的逻辑结构和程序设计的、没有数学瑕疵的专用算法。这套算法是目前惟一确知的保存得非常完整的西周数学实用例证，应当是西周数学的一项成果。揲算的存在使我们有理由认为西周时期的数学家们已有能力和条件创制出一些与生产实践相关的实用算法，而《周礼》“九数”中的部分内容正是由这些算法所构成。注意到揲算也是迄今所知中国最为古老的程序化的专用算法设计，根据本书的研究结果，可以明确地将程序化的算法设计的出现时期提早到西周时期，距今已有近2800年的历史，在中国古代数学史的研究中，如此珍贵的材料显然不应被忽视。

研究表明，揲算具有三条显著的数学特点：

——显示出程序化实用算法设计的数学思想；

——采用了以经验归纳和全举验证为主的数学方法；

——依赖于筹策算具的手动操作型演算方式。

这些特点正与《九章算术》等古代算经框架下形成的中国传统数学的一些主要特征相容，从而揭示出中国传统数学与古老的揲算之间，有着悠久的渊源关联。中国传统数学曾经取得过许多成就，对华夏文化的形成和繁荣做出了重要的贡献。但由于缺乏积极的交流，人们对其思想、方法和工具等方面存在的局限性未能形成充分的认识，再加上社会及政治等方面的原因，自元末以后，中国传统数学逐渐出现了衰微不振的局面。中国传统数学被现代数学所取代，是在专制统治和守旧思想被削弱和摒弃的背景下，新一代数学家们通过广泛的交流与学习，融会了中外科学思想和先进方法的必然结果。

应当说明，《周易》一名通常有三种含义：一是指称为《周易》的占筮术，二是指传世的《周易》经传合编文本，三是指传本《周易》中的经文部分即《易经》（另一部分为传文即《易传》）。显然，《周易》占筮术的涵盖范围最广，除了用于索辞释占的经传文本之外，还包含了用于起卦的揲算，以及索辞释占规则和仪式要求。本书为了避免混淆，一般用“传本《周易》”或“今本《周易》”来表示传世的《周易》经传合编文本，而用《易经》和《易传》来区别《周易》古经和后世传文。先秦时期有《连山》《归藏》和《周易》三种都使用六十四卦的占筮术，史称三《易》，但流传至今的只有《周易》一种。因而在没有特殊说明的情况下，《易》可视为《周易》的简称。至于“易学”、“易理”、“易数”等专用词汇中的“易”字，一般情况下都只联系于《周易》占筮术或《周易》经传文本。

本书用到的数学知识仅限于初等数论和古典概率计算中很少的一些理论，而且都是十分浅近的内容，并无深奥之处。尽管如此，对笔者来说仍然深感所知有限，虽经反复努力，也未必能完成好动笔之初设想的工作任务。

本书在写作过程中得到了贵州科学院应用数学研究室主任张明义研究员的帮助，采纳了好友罗永祥先生的建议，还引用了不少专家学者论著中的研究成果和相关资料，笔者向他们表示衷心的感谢。笔者还要感谢母亲黄绛珠、妻子平素芳以及诸多亲友，如果没有他们长期的鼓励与付出，本书几无完成的可能。

当然，笔者更要感谢山东大学易学与中国古代哲学研究中心主任和中国周易学会会长刘大钧教授的热情支持，以及巴蜀书社施维先生在本书编辑出版过程中给予的倾力襄助。

本书通过对《周易》占筮术中部分数学问题的讨论，为更加全面地认识和了解《周易》提供了一个可能的视角，得出了一些结论、推测和看法。但是，应当说这都是一些尚属探讨性质的东西，有的内容还不甚成熟，有的推测还有待考古发现和进一步的理论研究予以证实或推定，因而其中定有谬误不确之处，希望得到大家的指正，也希望与有兴趣的读者进行交流和讨论。

张图云 2010 年 8 月于贵阳

E－mai：zhangtuyun@sina. com

目　录

第 1 章　《周易》占筮术及经传文本 …… 1

1.1　《周易》是一种占筮方法 …… 1

1.2　《周易》是一部占筮用书 …… 7

1.3　《周易》占筮术的流传 …… 11

1.4　关于《易经》所用数字的讨论 …… 14

第 2 章　《周易》占筮术使用的卦象 …… 26

2.1　卦象的构成 …… 26

2.2　卦象形成过程的推测 …… 31

2.3　卦象的数学特点 …… 41

第 3 章　《周易》占筮术使用的揲扐算法 …… 61

3.1　揲扐算法 …… 61

3.2　关于揲算和易数的数学观察及讨论 …… 69

3.3　揲算研究概况 …… 75

第 4 章　揲算命题的归纳和证明 …… 84

4.1　一元、二元和三元数学归纳法的基本形式 …… 84

4.2　不挂一的揲扐计算(局部) …… 85

4.3　有挂一的揲扐计算 …… 93

4.4　对不挂一的揲扐算法的补充及揲扐计算的扩展形式 …… 98

4.5　关于筮数算得方法的猜测 …… 100

第 5 章　《周易》揲算结果数的出现概率 …… 105

5.1　《左传》《国语》中的《易》占记录和问题的提出 …… 105

5.2　揲扐计算结果数出现概率的分析 …… 108

5.3　爻符、卦象和各类之卦的出现概率 …… 113

第 6 章　《周易》揲算概率指标的考古应用 …… 119

6.1 《周易》揲算方法和变卦规则定型时期的下限 …… 119
6.2 天星观、包山和葛陵卜筮简中的卦象是使用《周易》占法的记录 …… 123
6.3 《易林》释占辞条的出现概率并不均衡 …… 127
6.4 《太玄》卦象的出现概率并不均衡 …… 131
第7章 《周易》揲算是同类算法中的最佳选择 …… 134
7.1 问题的提出及揲算命题的形式 …… 135
7.2 利用命题B进行的比较分析 …… 138
7.3 《周易》揲算的发明决非偶然 …… 147
第8章 《周易》揲算是西周数学的一项成果 …… 150
8.1 西周数学概况 …… 150
8.2 《周易》揲扐算法是西周数学的一项成果 …… 165
8.3 《周易》揲算的数学特点 …… 169
8.4 相关评价 …… 171
8.5 关于早期筹算及商周数字与早期筹符的讨论 …… 176
附录
三项棱锥中三项展开式系数的一些性质和递推关系 …… 190

第 1 章 《周易》占筮术及经传文本

匪我求童蒙，童蒙求我。

——《易经·蒙》

蛮、夷、氐、羌虽无君臣之序，亦有决疑之卜。或以金石，或以草木，国不同俗。然皆可以战伐攻击，推兵求胜，各信其神，以知来事。

——司马迁《史记·龟策列传》

中国古代用于占测算命的方法有多种，《周易》占筮术是其中之一。一般认为《周易》占筮术有着古老的起源，其传世形态定型于西周时期，是周人依据筮算结果预测人事吉凶的主要方法。在流行于先秦时期的数种占筮术中，基本上完好地保存至今的惟有《周易》。

在讨论《周易》占筮术中的数学问题之前，有必要对《周易》占筮术及所使用的《易经》和《易传》文本的基本情况作简要的介绍。

1.1 《周易》是一种占筮方法

1.1.1 中国古代的占问术

使用占问之术预测吉凶或指导决策，是人类社会生活中一种极为普遍而古老的文化现象。在能力、知识和信息都相当有限的古代，面对变化莫测的自然界和纷繁复杂的社会关系，人们在遇事决策之前，往往由于无法估计或预知行动的后果，免不了会对结局的吉凶产生担忧或疑虑。在古人的心目中，冥冥深处也许存在着无所不知、无

所不能的天地神明，这就很自然地产生出从神明那里获取指引或启示，以及向神明祈求保佑的心理需求。这样，在不同地域的古人族群中便出现了各种用来沟通人神、求取神示的占问方法。占问事宜多由族群中知识丰富或阅历较深的人实施。在涉及重大事项的决策时，族群首领往往亲自介入占问活动，因而是很严肃的事情。一旦获得了神示，人们将按神明的旨意行动，这在事实上起到了排除异议、统一意志的作用，必然有利于族群的团结与首领地位的巩固。特别是在所得神示的确符合实际情况或顺应于自然规律时，将对族群的发展壮大起到积极的作用。也许，这就是自古以来，占问诸术在不同地域的人类族群中都普遍受到重视的主要原因。另一方面，在多种占问方法并存的情况下，肯定是人为干预因素较少而且应验比率较高的方法更容易被人们认可。因而在随机条件下追求较高的应验率也是占问方法本身不断改进更新的原始动因。显然，当一种占法失去了信众们的崇奉，这种占法也就失去了存在的理由。随着生产力的提高及社会结构的演进，一些强大的族群发展成早期的国家。在这些国家中，怎样才能更加令人信服地获取神明的启示，仍然是一门非常重要的学问，其结果是形成了各种具有传统特色的占问文化。我们今天在不同民族和国家的传统文化中，大都能发现一些与占问有关的神秘文化内容，这是很正常的现象。

在中国的传统文化中，曾经出现过多种向神明祈取启示的占问方法。司马迁在《史记·龟策列传》中就说：

> 蛮、夷、氐、羌虽无君臣之序，亦有决疑之卜。或以金石，或以草木，国不同俗。然皆可以战伐攻击，推兵求胜，各信其神，以知来事。

可见，用各种占问方法求取神示，在中国古代的社会生活中也是相当普遍的。根据学者们的研究，中国古代的占问之术虽然头绪很多，但大体上都有古老的起源，经历了各自的发展过程，在一些并行使用的方法中，有的还保留着相互影响的痕迹。按照这些占问方法赖以建立的依据和形态特征，大致可以将它们区分为下述 4 种类型：

（1）以占星为代表的类型

占星术将天象联系于人事，依据日月星辰在位置关系、运行特征、色彩形状等方面的变化，以及特异天象的生灭，进行人事吉凶的预测。在占式术等派生的占法中，季节气候、地理方位等地学因素与星象历算、时辰日期等天学因素都被用于占测。这类与天地观念直接相关的占问方法对古代社会的生产和生活秩序影响极大，历代统治者都非常重视，尤其是对占星术的控制最为严格。为了巩固王权，防止民间私测谎报引起的人心扰动，大约从西晋开始，唐、宋、元、明诸朝都颁有禁令，严禁民间私学天文历算和占星之术。例如，《晋书·武帝纪》有：

> 禁星气、谶纬之学。（泰始三年，即公元 267 年）

又如《续资治通鉴长编·卷十八》中有：

> 诸道所送知天文相术等人凡三百五十有一，十二月丁巳朔，诏以六十有八人隶司天台，余悉黥面流海岛。(太平兴国二年，即公元977年)

等等。这样一来，占星术在各个朝代都由官方控制，在民间则少有流传及应用[1]。可能由于占式术分成六壬、遁甲、太乙等若干分枝占法，并无统一形式，它们虽有基于天地观念的古老来源，但在秦、汉以后的影响较为分散，基本上属于民间杂占，官方一般不予禁止。

(2) **以占卜为代表的类型**

占卜术的产生可能与古人对烧灼骨片时所生裂纹的观察有关。由于占卜时须使用动物的甲骨材料，因而学者们认为这是一种古人对“动物之灵”的神秘崇拜[2]。占卜术在殷商时期最为兴盛，秦汉以后便极少采用。通常使用的卜材是乌龟的腹甲和牛羊的肩胛骨。占卜前要先在经过磨削整治的甲骨片材上钻凿凹形槽孔，占卜时用火炙灼槽孔部位，甲骨因受热不均，槽孔部位会出现裂纹。很可能因为甲骨拆裂时常发出“噗”声，或形成象形于甲骨上的裂纹的“卜”字，所以这种占法被叫做“卜”。甲骨上出现的裂纹称为“兆”，每次占卜所得兆象各有不同。古人通过长期的观察与总结，将这些兆象归纳为若干不同的类型，认为它们代表着相应的神明的旨意，因而可以用来预测所要贞问之事的吉凶。卜者常将与占卜有关的事情用当时的文字契刻在甲骨上，这就是著名的甲骨卜辞或甲骨文。近百年来，在殷墟及周原等地出土了商周时期有字符的卜甲卜骨达十多万片，发现了五千多个不同的字符。目前已辨识出其中的一千多字，基本上可以用来解读甲骨上记载的事情，使我们对中国古代的历史和文化有了更为确切的了解。

(3) **以占梦为代表的类型**

人在睡眠状态下往往会做梦，梦境的情形与梦者的经历、情绪、健康状态等可能都有关系，涉及人的心理、生理、精神、意识以及生存环境等方面十分复杂的问题。古人将梦中所见与鬼神、灵魂等联系在一起，认为可以用来预测人事的吉凶，便形成了占梦术。占梦术与其他诸如摸骨看相之类同人体有关的占问之术，通常都被视为杂占，在民间有着广泛的流传。

(4) **以占筮为代表的类型**

占筮术起源于古人对数的神秘崇拜，因而也称之为数占。古人认为，在某些随机条件下的所得之数可以用来预测人事的吉凶。例如从一堆草茎或竹签中任意抽取一些出来进行点数，将得数的单双作为判断吉凶的依据，就是一种数占，而且很可能是比较原始的数占。在《周易》类的占筮方法中，用于占筮的工具称为“策”，通常是一些用竹材制成的签状物，由于与称为“筹”的古代计算工具同源，因而有“筹策”之称。古人也常用蓍草的茎做策，因而古书中言及蓍时一般都与占筮相关。古代有一种职业

叫做“巫”，一些巫除了跳神驱邪、采药行医之外，还长于占筮。所以，关于“筮”字，《说文解字》的解释是：

筮，《易》卦用蓍也。从竹，从巫。

说占筮术是对“植物之灵”的崇拜，只是从占筮算具的用材多取自植物的观察得出的看法，更本质的认识应与古人惊奇于某些记数或数算规律时所产生的神秘崇拜有关。古代的占筮方法很多，也衍生出许多与数相关的杂占。在这些占问方法中，《周易》是流传最广的一种。《周易》占筮术的早期情况目前尚不清楚，但它肯定有着极为古老的起源。一般认为，传世的《周易》占筮术定型于西周时期，传续至今已有将近三千年的历史，是各种占问方法中最为稳定、对中国传统文化的影响也最大的一种。

1.1.2 《周易》是一种占筮方法

占筮起源于人们对数的神秘崇拜，但不同的族群在不同的历史时期所使用的占筮方法通常并不相同。在商代，人们所用的占问方法虽以占卜为主，但也使用占筮。从出土的商代筮数记录（参看本书第 2 章 2.2.2 节）来看，商人所用的占筮方法与《周易》占法并不相同。一般认为《周易》占筮术是周人在西周时期发明的占筮方法，应当是在周人早期占法的基础上改进完善的结果。但是，除了筮数形态相近之外，周人的早期占筮与商人的占筮有什么联系，则是尚待考证的问题。

根据出土的西周甲骨金石文物和传世文献中的相关记载，可知周人在使用占卜术的同时，占筮术也相当兴盛。卜、筮并用成了两周时期占问文化的一大特点。《尚书·君奭》所说：“故一人有事于四方，若卜筮，罔不是孚。”就用四方百姓对卜和筮的绝对崇信来比喻人们对君王举措的响应。《诗经》中“尔卜尔筮”（《卫风·氓》）、“卜筮偕止”（《小雅·杕杜》）等等，都是卜、筮并用的写照。当时流行的占筮方法有好几种，《周易》（包含早期《周易》）便是其中最受重视的方法之一。从此以后，用《周易》作占，在中国历史上便从未间断，一直传续至今，而且在汉代和宋代还出现过两次以《周易》占筮术及经传文本为核心的易学研究高潮。《周易》占筮术以其内涵的丰富哲理，对中国传统文化的形成有着一定的影响。

《左传·僖公十五年》说：

龟，象也；筮，数也。

指出卜之所依是甲骨上的灼裂兆象，是实在的物象；而筮之所依则是抽象的数。当然，这里的“数”应不止“记数”的意思，还有按某种规则进行“数算”的含义，但本质上是神秘文化意义上经由占筮求取的天命之数。古人认为，从这些“象”或“数”中

可以窥测出人事的命运与吉凶，并据以做出顺应或者规避的决定。

《礼记·曲礼上》则关注于卜筮之术的政治功能：

> 龟为卜，筴（策）为筮。卜筮者，先圣王之所以使民信时日、敬鬼神、畏法令也；所以使民决嫌疑、定犹与（豫）也。故曰：疑而筮之，则弗非也；日而行事，则必践之。

可见，用卜筮之法探求神意，是解除疑虑，协调行动，统一意志的有效方式。所以先圣王要求人们不但不要怀疑卜筮的结果，而且必须按期践行。正是由于古代帝王们注意到卜筮占问之术在社会生活中有着重要的作用，所以对一些重要的占问术实施了严格的管理。汉晋以后，历代都对占星术严加控制，不许流传于民间，就是典型的例证。从目前所知的情况来看，商周时期，王室政府就对重要的占问术设立了管理部门，配备了相关的职官人员，其中，就有专门管理占筮的部门和人员。

《吕氏春秋·审分览·勿躬》说"巫咸作筮"，而《尚书·君奭》有"在太戊时，巫咸乂王家"的记载。将它们联系起来，大致可知商王太戊时，由辅臣巫咸管理并施行占筮。当然，由于缺乏资料，商代的占筮叫什么名称，按怎样的规则行占，至今仍不清楚。到了西周时期，随着周人所用占筮术的完善，占筮的地位逐步提高，官方对占筮事务的管理也有了明显的加强，由殷周之际的"择建立卜筮人"（《尚书·洪范》），发展成《周礼·春官宗伯》中所说的由"大卜"、"筮人"等组成的一套机构。这个机构的任务是：

> 上春相蓍，凡国事共蓍。掌三《易》，以辨吉凶。凡卜筮既事，则系币以比其命。岁终，则计其占之中否。

从中可知，职司占筮的人员在春正月时要选採、收藏蓍草，到需用占筮术决定国家事务时要保证蓍草的供应。筮者用《连山》《归藏》《周易》三种统称为《易》的占筮方法占问相关事宜的吉凶。每当占卜和占筮完成后，都要将得到的结果记录并保管起来，到了年终则对应验情况进行统计。可见，周王室对卜筮的管理是严格而有序的。

前面所说西周时期并行使用的三种统称为《易》的占筮术见于《周礼·大卜》：

> 大卜……掌三《易》之法：一曰《连山》，二曰《归藏》，三曰《周易》。其经卦皆八，其别皆六十有四。

可知这三种《易》占使用的八卦和六十四卦的卦象符号都是相同的，可以估计，成卦时所用的筮算方法也应该相同。一般认为这三种《易》占的差异主要是释占方法和繇辞文本各有不同。1993年，江陵王家台秦墓出土了一批竹简，其中有一种被考定为

《归藏》的文本，属于战国末期的文物，表明当时确实存在《归藏》占法，因而《周礼》所载，是有参考价值的[3]。西周时期，通过筮算得到卦象，再配合各自的繇辞文本释占的三种《易》占，已成占筮方法中的主流，其他占筮方法则逐渐被淘汰而不传。由于《连山》《归藏》二《易》大约在汉晋时期先后失传，所以今人对它们的了解甚少，但仍可估计三《易》中，《周易》是较为主要的占法。这样，虽然有时《易》有泛指三《易》的意思，但是在有些场合，《易》就是《周易》占筮术的简称，一般不会引起混淆或误解。

关于《周易》中的“周”字，历来有两种解释：一是汉代成书的《易纬》所说的“因代以名周”，认为“周”是朝代的名称。这就界定了《周易》是周代的事物，或者说，是周人使用的占筮方法，与其他的占筮方法是有所区别的。后来的学者们，如唐代的孔颖达，宋代的程颐和朱熹等人，多采用此说，是比较流行的一种解释。二是《易传・系辞上》有“周乎万物，道济天下”的语句，虽然并未明确指出这就是《周易》中“周”字的出处，但东汉学者郑玄亦释“周”为“周普”，是周全，普遍的意思，强调了《周易》之道能够涵盖万物的普适性，后世也有不少赞同此说的学者。

关于“易”字的解释相对要多一些，例如《说文解字》认为：

> 易，蜥易，蝘蜓，守宫也。象形。秘书（《参同契》）说：“日月为易”，象阴阳也。

是说“易”字或是象形于蜥蜴，或是取义于日月所代表的阴阳概念。汉代《周易乾凿度》则认为：

> 易，一名而含三义：所谓简易也，变易也，不易也。

但是最为贴切的解释出自《易传・系辞上》，书中说：

> 生生之谓易。

强调的是万物生化，变易无穷。唐初学者孔颖达在《周易正义・序》中也认为“易”是：

> 变化之总名，改换之殊称。

这样，作为占法名称，似乎可以将“周易”解释为：周人使用的，以变易为特征，其道理可以涵盖万物的一种占筮方法。

用传世的《周易》占筮术求占时，主要有以下三个环节：首先是揲算起卦，其次

是因卦索辞，最后是依卦象和辞文释占。此外，为了表达筮者对天地神祇的虔诚和敬畏，占筮过程一般要遵循一套专门的仪式，宋代学者朱熹在《周易本义》中专门有《筮仪》一文，对此作了详细的介绍。

所谓“揲算”，是“揲扐算法”的简称。在这里，“揲”的意思是按一定的规则点数筹策，“扐”的意思则是将揲后剩余的筹策归拢并夹于手指间的操作。在《易》占筮算中，由于以“揲”和“扐”两种操作为特征，故称之为揲扐计算。由于早期的占筮方法及操作规则主要依靠师传口授的方式代代相传，并不专门录成文本，因而后人对早期《周易》占筮术中使用的规则及算法并无确切的认识，只能从各种古代文献的零散记载和出土文物的相关信息中获得大致的了解。从目前已掌握的情况来看，揲算起卦的方法相当稳定。虽然这种算法的相关记录最早见于战国时期成书的《易传·系辞上》，但可推测这种算法定型的时期不会晚于西周晚期。可以说揲算自从在西周时期定型以后，至今没有任何变化，一直保持着固定的算法形态。揲算为什么能有这样好的稳定性，是本书将要研究的问题之一（参看本书第7章）。就占筮来说，揲算的特点是在分拆筹策时具有随机性，因而每轮揲算得到的结果数可能相同，也可能不同，由这些结果数确定的爻符可能是阳爻，也可能是阴爻，这就是《易传·系辞上》所说的：

> 极数知来之谓占，通变之谓事，阴阳不测之谓神。

相比之下，因卦索辞的规则却不是很明确。笔者猜测，《连山》《归藏》诸《易》的存在，表明先秦时期就存在着根据相同卦象给出不同解释的状况，因而在《周易》占筮术中存在着某些不同的索辞规则是很有可能的。宋代学者朱熹通过对《左传》筮例的研究，曾对变卦索辞的办法做过归纳总结（详见《易学启蒙·考变占第四》）[注1]，但仍不能据以确定这就是西周和春秋战国时期《周易》占筮术使用的索辞规则。

至于依卦象和辞文对求占问题所作的解释，灵活变通的处理方式则几成惯例，不论从《左传》《国语》筮例，还是从形成于春秋战国时期的多种解《易》传文，均很难归纳出确切的释占规则。一般而论，这种释占时既有卦象和辞文作依据，又存在想象空间和变通可能的状况，使得释占时往往带有浓厚的释占者的个人特色，因而古书中记录的许多筮例，大都与历史上有名的占筮家有关。

1.2 《周易》是一部占筮用书

用《周易》占筮术进行占筮时，完成揲算起卦之后，接着有因卦索辞和按卦象、繇辞释占的环节，这些环节的落实，依赖于一本记录了卦象和繇辞的书籍。这部书的名称也叫《周易》。一般认为《周易》一书形成于西周时期，书中的素材或涉及的事物有着古老的来源。作为释占的基本依据，在《周易》占筮术广为流传后，记载卦象和

繇辞的文本便成为一部被尊为经典的占筮用书。从基本的功能来看，《周易》古经是一部服务于《周易》占筮术的专用书籍，所载卦象和繇辞经文都是用来释占的。由于《周易》占筮术历来采取师传口授的方式传承，《周易》古经是关键的师授之物，因而所用经书与占筮方法同名是很自然的事情。类似的情形还见于《连山》和《归藏》占法，与这两种占法相关的卦象及繇辞的记载文本也叫做《连山》和《归藏》。

现在所见的传本《周易》一书的内容，已超出了《周易》古经的范围，除了包含卦象和繇辞经文之外，还增加了阐释卦象和经文的传文。这种将卦象、经文和传文合编为一书的做法，始于汉代易学家王弼，目的是便于观览使用。为了将传本《周易》同《周易》古经区别开来，习惯上将由卦象和繇辞经文构成的《周易》古经称为《易经》，而将传文称为《易传》。这样，《周易》一名就有了三种含义：一是指《周易》占筮的方法，即《周易》占筮术；二是指《周易》古经的书名，也就是后世所说的《易经》；三是指传本《周易》，即《易经》和《易传》的合编文本。具体使用时，只要稍加留意，一般不会混淆。

汉武帝独尊儒术，尊《易》《诗》《书》《礼》《春秋》为五经，“置五经博士”（《汉书·武帝纪》)。从此以后，《周易》古经便有了《易经》之名。为了便于研读《易经》，汉代易学家们收集编纂了一本文集，即前文所说的《易传》。《易传》中共有传文七种十篇，它们是《彖传》（上、下）《象传》（上、下）《系辞传》（上、下）《文言传》《说卦传》《序卦传》和《杂卦传》，有“十翼”之称，是阐释《易经》的辅翼之作。《史记·孔子世家》说：

> 孔子晚而喜《易》，序《彖》《系》《象》《说卦》《文言》。

因而传统易学认为十翼为孔子所作。在今本《周易》中，《彖》《象》《文言》诸传被拆散编入经文之内，《系辞》《说卦》《序卦》和《杂卦》则单独成篇附于经文之后。传文的基本功能是阐释经文，但在占筮活动中，《易传》通常也是释占的依据。在这个意义上，可以说包含了经文和传文的今本《周易》，仍然是一部专门用于占筮的书籍。当然，由于《易传》中的篇章多出自儒家学者之手，因而《易传》也是儒学著作。

《易经》中的卦象是何人所创，经文和传文是何人所作，它们是怎样形成的，是各种研究或介绍《周易》的书籍中常见的问题。尽管存在各种各样的研究结果，但由于证据有限，目前还难以得出一致的结论。

传统易学认为：

> 《易》道深矣，人更三圣，世历三古。（《汉书·艺文志》）

其中“三圣”是指创制八卦的伏羲、演成六十四卦的周文王和作十翼的孔子。“三古”则是指这三个圣人所在的历史时期。

《易传·系辞下》云：

> 古者包牺（伏羲）氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文，与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。

一般将使用卦象的占筮类型称为《易》占，根据这一说法，《易》占应是伏羲的发明，由于属于上古之事，其占法自然就简单一些，虽然只涉及八种卦象，但已足以通神明、类万物了。《易传·系辞下》又云：

> 《易》之兴也，其于中古乎？作《易》者，其有忧患乎？

还说：

> 《易》之兴也，当其殷之末世，周之盛德邪？当文王与纣之事邪？是故其辞危。

司马迁在《史记·太史公自序》中说：

> 昔西伯（周文王）拘羑里，演《周易》。

又在《史记·周本纪》中说：

> 其（周文王）囚羑里，盖益《易》之八卦为六十四卦。

大概是依据这类记载，传统易学认为《周易》占筮术起于殷周之际，是周文王被商纣王囚拘于羑里的中古时期，在伏羲八卦《易》占的基础上演绎形成的，所以经文的言辞语境中显示出周文王的忧患之情和历经危难的体验。

自清代开始，与传统易学不同的看法逐渐出现，例如清末皮锡瑞就认为《易经》的成书不在西周，而在春秋时期[4]。在各种疑古之作和研究文献中，学者们提出了《易经》成书于周初（顾颉刚：《周易卦爻辞中的故事》）、周末（李镜池：《周易筮辞续考》）、战国（郭沫若：《周易的构成时代》）等各种不同的意见。目前，不少学者倾向于认为《易经》中的经文形成于西周早期或中期。往往由于卦象的定型时期尚待考定，因而一些学者并不笼统地讨论《易经》的成书情况。例如李学勤先生的结论是：

> 《周易》经文所见人物及其事迹，确实都是很古老的。经文的形成很可能

在周初，不会晚于西周中叶。顾颉刚先生的观点，看来是可信的。[注2]

李先生的上述研究限于《易经》中的经文，而不涉及《易经》中的卦象，所以不能因此得出《易经》的成书也“不会晚于西周中叶”的推论。杨庆中先生在《周易经传研究》一书中综述了学者们的研究成果，得出“《易经》的成书，当在西周初年”[注3]的结论。不过，由于相关的研究内容基本上未论及六十四卦形成时期的问题，所以上述结论实际上也只适用于《易经》中的部分经文，谈不上“《易经》的成书”。

如果认为《周易》占筮术形成于西周，就意味着揲算起卦方法和六十四卦的定型时期以及繇辞经文的编定时期都不迟于西周晚期。从目前已知的情况看，学者们的研究主要在经文方面，由于相关材料的缺乏，因而对算法和卦象的研究还显得相对薄弱，既不能得出《易经》成书于西周初年的结论，也不能得出传世的《周易》占筮术定型于西周初年的结论[注4]。有鉴于此，本书将通过对揲算和卦象定型时期的讨论，为《周易》占筮术的定型时期不迟于西周晚期的判断提供一个佐证（参看本书第 2 章 2.2.4 节，第 6 章 6.1 节和第 8 章 8.2.1 节）。

《易经》一书的性质虽是占筮用书，但历代学者中多有视之为哲学书或历史书的人。这是因为《易经》中不但包含了丰富的古代哲学思想，而且具有以史说《易》的想象空间和相应的论证依据。孔子老而喜《易》，他喜的不是占筮，而是“观其德义”和注意书中的“古之遗言”（语见马王堆帛书《要》）。孔子从哲理和历史的角度研读《周易》古经的做法，对中国传统经学有着直接的影响，最终使《易经》成为重要的儒学经典。近现代的学者们更是从全新的视角去探讨《易经》中的哲学思想和历史文化内涵，取得了许多研究成果，使我们对华夏文明的形成与发展有了更深刻的认识。

关于《易传》的成书时期，一般可以笼统地认为是在战国。但十翼并不出自一人之手，各篇的成文也有先有后，而且学者们对每一篇传文写成于何时还存在不同看法，所以在更为具体的层面上，目前还没有形成一致的意见。

《系辞》是《易传》中比较重要的传文，对其成书年代的判断，学者们的分歧较大，大致有春秋晚期孔子所作（金景芳：《周易的两个问题》）、战国前期（高亨：《周易大传今注》）、战国中期（张岱年：《论易大传的著作年代与哲学思想》）、战国末期（朱伯崑：《易学哲学史》）、西汉初期（李镜池：《周易探源》）等数种看法。尽管如此，在一般性的场合，通常可以笼统地说《系辞》是战国时期的作品。

附带说明，本书研究揲算的主要依据，出自传世的《易传・系辞上》第八章，即“大衍之数”章（相关内容在本书第 3 章中有具体介绍，这里从略），因而可以认为目前所知关于揲算的最早记录当出自春秋战国时期的占筮家之手。1973 年，长沙马王堆汉墓出土了一批帛书，其中有一篇是《系辞》。研究证明，这份帛书《系辞》的抄写时间应在西汉早期，是迄今为止所发现的最为古老的《系辞》抄本。将今本《系辞》与之相比照，发现了不少差异，其中较重要的是帛书《系辞》中缺少了一段包含“大衍之数”章在内的文字。这样，即使今本《系辞》成文于战国时期，仍有“大衍之数”

章是否为后人添加的问题。这种情况引起了学者们的注意。经过研究，李学勤先生的结论是：

> 看来，“大衍之数五十”章的起源不可能晚，应该在《系辞》形成的时期即已存在。……帛书上七章、上九章间有成段缺脱，故而上八章之失去很可能是脱文的缘故。（参看李著《周易溯源》，巴蜀书社，2006年1月版，第336～354页的详细论述）

根据这个结论，可以认为“大衍之数”章的内容不见于帛书《系辞》，很可能是由于在传抄的过程中出现脱文所造成的结果，即使是抄写为帛书时所依据的文本中已经缺脱了这段文字，也不能据以证明“大衍之数”章是后人添加的内容。1978年、1987年和1994年先后出土了三批录有不少卦象的战国楚简，本书从概率统计的角度对这些卦象进行了分析研究（参看本书第5章，以及第6章的6.2.2节），得到的结果为使用“大衍之数”章所说的传世揲算起卦的做法曾流行于楚国的判断提供了一个来自数学领域的佐证。这个结果同时也表明，战国时期的占筮家或易学家们在写作《系辞》时，将当时所用的这种起卦算法写人“大衍之数”章中是完全有可能的。

1.3 《周易》占筮术的流传

在流传至今的先秦古籍中，与《诗经》《尚书》等书相比，《易经》的传承显得最为顺利。其实，在讨论《易经》一书传承情况的时候，不能忘记它是《周易》占筮术流传承续的结果。如果《周易》占筮术在秦汉时期被淘汰或被禁止使用，《易经》这部书就不可能传承得这样完整，甚至很可能会失传。

在周人的族群内部，人们所用的占筮方法不会是一成不变的。在不同的历史时期，周人使用的占筮方法应经历了由简单到复杂、由粗糙到完善的过程。尤其是《周易》占筮术中的揲算方法、卦象系统和繇辞文本，肯定经历了一段逐步完善的过程，最终才形成传世的比较成熟且稳定的形态。在西周时期，《周易》占筮术主要服务于王室贵族，参与占问的人员应是当时最有名的占筮家，使用最好的占材筮具，采用的仪式规格也最高。虽然统治者们对这种占法的推崇必然会引起民间的效法，但最完善的筮法及仪式并无广泛流传的条件，因而民间的占筮活动无论从哪个方面来说，都是不能比拟的。另一方面，从一些西周金文中反映出来的“周邦”与“万邦”（参见询簋和史墙盘的铭文）并存的国家结构来看，可以推测，《易经》一书在西周时期的使用范围还局限于周邦。或者说，正是西周王室对这种最为重要的占筮法有着严格的控制，《周易》占筮术和它所使用的《易经》文本并没有广泛的流传。

西周末年，周室衰微，礼崩乐坏，王室对卜筮事宜的控制逐渐松弛。到了春秋时

期，过去专门服务于王室贵族的卜筮人员逐渐流散于各诸侯国，使《周易》占筮术得到了广泛的传播。古代文献中使用《周易》作占的筮例最早见于《左传·庄公二十二年》的记载，其文云：

周史有以《周易》见陈侯者，陈侯使筮之。

根据《史记·陈杞世家》的记录，这次占筮发生于陈厉公二年，即公元前705年，是一位来自周王室的史官为陈厉公所作。这个占筮家携带了周王室使用的《周易》古经文本，跑去见陈国的诸侯，并为他作占。这位占筮家的所为也许不过是为了求生，但其结果却有效地促进了《周易》占筮术以及《易经》这部书的流传。从此以后，在春秋时期的大多数诸侯国中都陆续出现了用《周易》作占的事件，《左传》和《国语》中涉及占筮的记录便多达十国二十余条，其中大多数与《周易》占筮术有关。这些记录为后人研究两周占筮提供了非常宝贵的资料。

历史上最为著名的传《易》者当是孔子。《史记·孔子世家》云：

孔子晚而喜《易》，序《彖》《系》《象》《说卦》《文言》。读《易》韦编三绝。曰：假我数年，若是，我于《易》则彬彬矣。

所谓“彬彬”，是全面和充实的意思，强调了于占筮之外，孔子对《周易》还有更为全面和深刻的认识。1973年，长沙马王堆汉墓出土一批帛书，其中的《要》篇属于《易传》佚文。《要》云：

夫子（孔子）老而好《易》，居则在席，行则在囊。

印证了《史记》“孔子晚而喜《易》”，“读《易》韦编三绝”的记载。显然，要全面了解《周易》古经，不熟知具体的占筮方法是不行的。《要》云：

子曰：吾百占而七十当。

可知孔子用《周易》作占大概有百分之七十的准确率。这是孔子不惟研读《易》文，还熟知《易》占的证明。按《史记·仲尼弟子列传》和《汉书·艺文志》的记载，汉代的《周易》占筮术为孔子所传，从“孔子传《易》于瞿（商瞿，鲁人）”开始，经过子弘（楚人）、庸疵（江东人）、家竖（燕人）、乘羽（淳于人）、庄何（齐人）、中同（东武人）到杨何（菑川人），至少经八传历三百余年至于西汉。其中的首传弟子商瞿应当不是孔门儒学高徒。所以一些学者提出这样的疑问：“若说孔子晚而喜《易》，何不传其门下高弟，而独传一藉藉无名之商瞿?”[5]这个与《周易》占筮术及《易经》一

书的传承有关的问题，也许可以从秦始皇焚书坑儒的历史事件中找到答案。

《史记·秦始皇本纪》载有丞相李斯上书秦始皇云：

> 今皇帝并有天下，别黑白而定一尊。私学而相与非法教，人闻令下，则各以其学议之，入则心非，出则巷议，夸主以为名，异取以为高，率群下以造谤。如此弗禁，则主势降乎上，党与成乎下，禁之便。臣请史官非秦记皆烧之，非博士官所职，天下敢有藏《诗》、《书》、百家语者，悉旨守、尉杂烧之。有敢偶语《诗》、《书》者弃市，以古非今者族，吏见知不举者与同罪。令下三十日不烧，黥为城旦。所不去者，医药、卜筮、种树之书。

秦始皇批准了李斯的建议，这就是发生于秦始皇三十四年（公元前213年）的焚书坑儒事件。在这次事件中，儒道诸学的典籍被焚烧，传人被坑杀，繁荣于春秋战国时期的古代文化遭遇了亘古未见的一次浩劫。秦始皇应是出于对鬼神的敬畏，以及出于政治上的需要等原因而不禁卜筮之术，不烧卜筮之书，才使《周易》占筮术和这种占法所用的《易经》文本躲过了这场劫难[6]。《汉书·儒林传》就说：

> 及秦禁学，《易》为卜筮之书，独不禁，故传受者不绝也。

然而孔子敬鬼神而远之，他之喜《易》，“非安其用”，即不在于占筮之用。孔子关注的是经文中的圣人教诲和天地哲理，认为《周易》古经中“有古之遗言”，并说：“《易》，我后其祝卜矣，我观其德义耳也。”（以上诸语见马王堆帛书《要》）可见孔子虽然传授用《周易》求占的具体方法，但他所传之《易》更讲究占筮之外的研讨。应当说，孔子传《易》时并非只传了商瞿一人，他同时还传给了若干别的弟子。而这些弟子中的不少人也继续着传《易》的工作。当然，孔子的各代儒学高徒在传授《周易》的时候，除了传授占筮之法，也必然特别重视其中的儒学内容。进入秦代，这些以儒学为主的传《易》弟子难免因为“偶语《诗》《书》”和“以古非今”的罪名而罹难，势必不能逃脱焚坑之劫，结果他们所传之《易》也就从此中断。

按《汉书·艺文志》的说法，自战国至秦，“《易》有数家之传”，可是《史记》《汉书》所载，将《周易》占筮术从秦传续到西汉时期的，仅存商瞿一系。究其原因，很可能商瞿一系的弟子多出自楚、江东、燕等当时比较边鄙的地区，而且他们见长于《周易》占筮术，至少战国晚期此系的学《易》弟子已算不上儒学传人，到了秦代，因此得免于坑杀。商瞿一系的弟子们在传授《周易》占筮术的同时，也将《易经》一书完整地传续下来了。

传文的传承可能就没有这样顺当了。传文的内容以孔子及其弟子们对经文的理解和阐释为主，同时也融入了不少诸如道家等其他流派的认识，于占筮之外，明显地涉及哲学观念、社会伦理、修身治国、阴阳五行、古圣人的教诲等儒道诸学的内容，多

为李斯主张予以禁绝的“私学”，很可能难逃秦火。李学勤先生就认为：

《周易》经文是卜筮之书，而《易传》十翼则是儒学著作，自应属于禁绝的范围。

在研究长沙马王堆汉墓出土的帛书《系辞传》时，李先生指出：

其构成其实是和今传本基本一致的，不过有一部分脱失，一部分又散入他篇，于是成了帛书的面貌。这种现象是怎么造成的呢？最可能的原因就是秦火。[7]

1973年，长沙马王堆汉墓出土了六篇帛书传文，除了《系辞》之外，其余《易之义》《二三子问》《要》《缪和》《昭力》五篇都是失佚的传文[8]。一般认为秦汉时期与《周易》古经有关的传文应有多种，汉代易学家们收集成编的十翼只是其中的一部分，这一部分传文随《周易》经文得到了顺利的传承，而其他传文则由于种种原因而多有失传。

1.4 关于《易经》所用数字的讨论

在传世的《周易》古经文本中出现的数字不多，而且全部都是十进制记数法下以个位数为主的正整数。从数学的角度进行观察，这些数字大体上可以分为两类。第一类数字用于爻题的编写，其中将爻符位置表为数序的数字是连续的自然数，由于每卦只有 6 个爻位，因而采用的数字为一（记为“初”）、二、三、四、五、六（记为“上”），都是个位数。爻题中还用六和九两个数字表示爻符的阴阳属性。第二类数字散见于用作释占的经文繇辞中，一般用于与事物数量有关的描述。除了在少数如像“先甲三日后甲三日”这样的辞句中，所用诸数可能存在着某种与数序有关的特殊联系之外，这些在繇辞中用到的数字之间基本上既没有数序关系，也没有运算关系。或者说，这些出现于繇辞中的数字大体上都处于独立使用的状态，一般情况下数与数之间并不存在数学或数序意义上的相互关联。可能是因为这些数字的存在形态过于简单，而且数学上的意义并不明显，所以历来的学者们通常都没有从数学的角度关注过它们。不过，既然本书的内容主要是探讨《周易》占筮术中涉及的若干数学问题，在《易经》文本中最先接触到的也许就是这些数字，因而有必要先介绍一下它们的基本情况，并作一些讨论。下面的讨论将会涉及卦象的构成规则，以及卦象中各爻爻题的形成规则等方面的部分内容，这些规则在本书第 2 章的 2.1.1 节有具体介绍，可供参考。

1.4.1 用于繇辞排序的卦象和爻题

今本《易经》中的释占繇辞共有450条，由于数量不少，需要用一定的方式将这些辞条排列起来才便于使用。《周易》占筮术采用的办法是按64种不同的卦象和每卦6个爻符的位置数序来进行编排，属于一种专用的双重标识方法。虽然具体的做法有其特殊性，但是可以认为这种做法是现代数学中常见的双重标识法的古老形态。

（1）卦象、卦名和爻题在编码排序方面的特点

传本《易经》由卦象和繇辞构成，其中卦象部分除了卦象符号本身之外，还附有卦名。卦象是专用的符号而不是文字，卦象只有形而没有对应的读音，为了便于占筮应用，给它们各取一名显然是必要的。卦名用字的选取有何依据或规则，似乎并不清楚，不过，笔者估计卦名出现的时期可能与卦象定型的时期相近。《易经》中的繇辞用按卦分列的方式写出，由于每个卦象都由6个爻符构成，因而每卦之下可列1条卦辞和6条爻辞。卦辞的题名就是卦象和卦名，而爻辞的题名则称为爻题。爻题附于爻辞之前，是这条爻辞同对应爻符的标识。与卦名不同，爻题的构成有明确的规则。一方面，用爻符的位置顺序来称呼它们是最方便的办法，于是便产生了爻题中的数字爻序。另一方面，又因爻符有阴爻和阳爻两种，占筮家们在爻题中加上“六”字以表阴爻，或“九”字以表阳爻，就把对应爻符的阴阳属性标识出来了。《乾》《坤》两卦比较特殊，在卦辞和爻辞之后各附有一条繇辞，题名分别是“用九”和“用六”，通常称为用辞。从已发现的简帛《周易》以及传本《周易》来看，各卦繇辞都是连续写出，若无题名设置，就很容易发生混淆而不便于检索使用。这样，在《易经》中，繇辞题名的设置，不仅有断句的意义，还具有对释占繇辞进行编码排序或检索的功能。关于这种与编码排序有关的功能，从数学的角度可以观察到下述特点：

①卦象与数序之间没有对应关系。64种不同的卦象是逐一地列写出来的，在传统易学中，《易经》中的卦象列写顺序基本上按传世版本中的式样固定不变，然而在用作排序的标识时，由于各卦都是互不相同的独立符号，因而并无硬性地规定其排序的必要。根据长沙马王堆汉帛《周易》中的卦象用的是另一种卦序，以及宋代邵雍使用的伏羲卦序又有不同等事实，可知至少自战国秦汉时期以来，卦象的排序并不统一。由于对应的繇辞都跟着自己的卦象走，所以卦序改变时实际上不会影响繇辞与卦象的对应关系，从而可以说明，在《周易》占筮术中并不存在将卦序固定下来的做法，因而也不存在将卦象对应于数字序列的必要条件，或者说，卦象和数序之间没有对应关系。与干支排序相比较，六十甲子则有固定顺序，可以对应于数序。这种存在多种卦序的情形也许与占筮家们对卦象在占筮术中的应用方面存在着不同的易学流派有关。反过来，卦序的可调性也为不同流派的产生提供了一种条件。

②爻题的6个爻序用数中使用了两个专用词汇。一个卦象中有6个爻符，因而在一个卦象中有6个放置爻符的位置。由于爻符不是数字，又有阳爻和阴爻两种类型，

为了表达某个爻位，靠爻符自身是不行的，必须找到对爻位进行标识的可行的办法。显然，用数序标识爻位最为方便。爻题中对6个爻位进行排序的数字本为一、二、三、四、五、六，是一种适用于所有64种卦象的具有一般性的做法，但其中的一和六两数被占筮家们称为“初”和“上”，变成了专用的词汇，它们虽有数序的意义，但并不记为数字。使用这样的专用词汇的原因，也许与可以在占筮过程中较好地营造出一种特有的神秘气氛的考虑有关。

③爻题中附加的六、九两个数字已无记数意义。今本《易经》中的爻题由爻序用数和六、九两个数字构成。其中六、九两数原是揲算结果数，本应具有记数的意义，但由于《易经》中的卦象由阴阳两种爻符构成，而古代占筮家们称阴爻为六，称阳爻为九，所以它们在爻题中被用来表示相关爻符的阴阳属性。这种转换有利于释占和营造《周易》占筮术的神秘性，然而却使六、九两字失去了记数的意义而成了附加的关于爻符阴阳属性的文字说明。除此之外，用六和用九中的六、九两字与爻题中这两个字的用法相同，均指爻符的阴阳属性而与记数无关。

(2) 关于繇辞排序标识方法的讨论

①繇辞排序标识方式的三种类型。卦象和爻符是专用的符号而不是数字，在爻题和用六、用九中，九和六虽为数字却不具有记数的意义，而本来并非数字的初、上两字却在爻符数序中应释为一、六两数。尽管如此，这些特殊的做法在强化了占筮术的神秘性的情况下，并不妨碍古代占筮家们对所有450条释占繇辞进行便于检索使用的排序。

《易经》中对繇辞进行排序和标识的方式有三种类型：第一种是在64个卦象下为每一卦配置一条卦辞，对任何一种确定的卦序来说，卦象的顺序便构成了对64条卦辞的检索序列。第二种是采用与“某卦某爻”相对应的形式，有序地排写出64×6=384条爻辞（指按爻序排写的繇辞）。这种情形与矩阵数学中常见的用“某行某列”的方式来表述矩阵中对应元素的做法几无二致。西周占筮家们的数学智慧由此可见一斑。第三种是特殊配置，即配有用六和用九两条“用辞”，由于它们分列于《坤》卦和《乾》卦的爻辞之下，因而也很便于检索。于是，使用这套排序标识方法，可供列写的释占繇辞一共就是384+64+2=450条。

②繇辞的编定与排序标识方法的形成有关。如果占筮家们是在先有了450条繇辞的条件下，再发明出这套排序标识方法来编列它们的话，其可能性估计不大，仅从现有爻辞中存在着重复辞条的现象，即可得出这种判断。例如《损》六五和《益》六二都有“或益之十朋之龟，弗克违”，便留下了一辞两用的痕迹。因此，尽管不少繇辞有着古老的来源，但传本《易经》中450条繇辞编定的时期不可能早于排序标识方法形成的时期。或者说，繇辞的编定不会在脱离排序规则的情况下完成。笔者推测，繇辞部分最后定型成书的时期大体上与卦象定型的时期同步或略晚。

③《易经》使用的卦爻标识法是中国最为古老的双重标识法。传本《易经》中用卦象和爻符数序构成的编码系统进行爻辞排序及检索的标识方法，是目前所知中国最

为古老的双重标识法。可以认为，这种专用的卦爻标识法，是中国古代占筮家们利用原始形态的组合数学思想做出的一项发明。

就双重标识法而言，《易经》中64种互不相同的卦象在确定了列写顺序之后，便具有排序符号的性质。但是由于六十四卦中的每一个卦象都是互不相同的独立的符号，因而仅从编码索引的功能来看，可以不必将它们转换成某种用于记数的数字序列。比如转换成十进制记数法的1～64（或0～63），也可以转换成二进制记数法的1～1000000（或0～111111）等等。当然，如果像代数符号那样，赋予卦象对应的数序含义，则可以使这种原始的卦爻标识法更近于现代数学中的双重标识法。不过，古代占筮家们事实上并没有从数学上进行这方面的考虑，其原因也许是他们认为占筮术或原始神学方面的需要远比数学方面的考虑更为重要。因而《周易》占筮术在近三千年的流传过程中，从来都没有出现过将卦象符号的使用涉及于记数的现象。由于古代占筮家们并没有从数序的角度安排卦序，所以未能受其启发发明出二进制记数法似乎也在情理之中（参看本书第2章的2.3.3节）。尽管如此，对于任何一种卦序，在排列顺序确定的前提下，仍可认为卦爻标识实质上是一种特殊的双重数序标识。

④卦象和爻题构成一种综合标识。如果将卦象与爻题合起来，则构成一种三重标识或综合标识。例如《屯》卦的第一爻是阳爻，即“《屯》初九”，第二爻是阴爻，故为“《屯》六二”等等。这就是许多易学文献中用来标识爻辞的方法。在这种标识法中除有明确的“某卦某爻”的排序检索功能之外，还表明了该爻是阳爻还是阴爻，有利于释占。应该说，这种综合标识法是非常实用的设计。

（3）关于爻题出现时期的讨论

关于爻题出现时期的考定，现有的重要证据有两条：

一条是在上海博物馆收藏的战国楚竹书《周易》中已有完全与今本《周易》相同的爻题，根据濮茅左先生《楚竹书周易研究》（上海古藉出版社，2006年版）一书中汇集的资料，从这批竹简中整理出来的文字涉及34种卦象下的繇辞，编列这些繇辞的可辨识的爻题共有150个之多。学者们研究认为，这批竹简随同墓主人入葬的年代大约在战国中、晚期，因而至迟在战国中期，《易经》中就已经出现了使用数序编列爻题的做法。这个事实结束了一些学者对爻题为汉代后人所加的怀疑。

另外一条证据出自《左传·昭公二十九年》，其文为：

> 秋，龙见于绛郊。魏献子问于蔡墨……对曰：……《周易》有之，在《乾》䷀之《姤》䷫，曰：“潜龙勿用”；其《同人》䷌，曰：“见龙在田”；其《大有》䷍，曰：“飞龙在天”；其《夬》䷪，曰：“亢龙有悔”；其《坤》䷁，曰：“见群龙无首吉”；《坤》䷁之《剥》䷖，曰：“龙战于野”。若不朝夕见，谁能物之……

显然，作为占筮家的蔡墨是引用了《周易》文本中所有与龙有关的繇辞[注5]，以向魏献

子说明古时确实存在过“龙”这种非常特殊的动物。为了说明这些繇辞的具体出处，蔡墨没有使用传本《周易》中与卦象配合的爻题，而是采用了由变卦占法（关于变卦规则详见本书第5章的5.1节）引申出的变卦对应关系的形式，可称之为变卦标识法。若用爻题来标识，蔡墨所引繇辞出自《周易》中《乾》卦的初九、九二、九五、上九和用九，以及《坤》卦的上六。有的学者根据这条史料推测，直到春秋晚期，《周易》文本中爻辞的编列还没有爻题的设置，或者说在《左传》成书的时期还没有发明用作爻题的数序标识法。因而当需要说明所引爻辞的出处时，使用的方法应类似于蔡墨的方法，即本书所说的变卦标识法。当然，根据这条史料可以确定，变卦标识法的发明应该不晚于春秋时期。

关于爻题形成时期的问题，其下限肯定是不迟于战国中期。不过，笔者推测，其下限似乎可以上溯到六十四卦定型不久以后，大体上不迟于西周晚期。这就是说，发明爻题的时期有可能早于变卦标识法的发明时期。兹讨论如下：

①两种标识法并不互相排斥。可以认为，不论是变卦标识法还是数序标识法都应当出现于六十四卦定型以后，由于它们具有附属于爻符的性质，因而出现于卦象定型前的可能性是不大的。进而不难判断，卦象定型后，不用任何爻题或标识，也可以直接在卦爻符号下列写繇辞，但是这样做既不利于语言交流，也不利于文字表达。为了弥补这一缺陷，占筮家们必然会寻找相应的解决办法。《左传》中的上述记载说明当时确有标识爻序的需求。蔡墨的办法是与变卦占法中一爻变和六爻变有关的变卦标识法[注6]，由于这种方法可以明确地对应于本卦（参看本书第5章5.1节）中的一条爻辞，故可用来说明某一爻辞的出处。注意到与六爻变有关的变卦标识只用于附有“用九”和“用六”的《乾》《坤》两卦，蔡墨所说的《乾》之《坤》“见群龙无首，吉。”便是其中之一。而对其余62种卦象来说，虽然都存在六爻变的情形，但因未附用辞，可知是没有意义的。这种情况似乎表明变卦标识法形成于《易经》文本定型之后，否则，占筮家们对其余62卦增设用辞的可能性应该是很大的。由于变卦标识法出自于当时流行的变卦占法，具有明显的占筮意义和易学意义，所以这种方法在占筮实践中较受欢迎而得以载入史书《春秋》的“左氏传”中。用数序标识爻序显然是当时数学能力可及且最为准确的做法，如果录之于文本又最为方便可行，因而也是一种可供占筮家们选用的方法。虽然我们在传世文献中看到的只是变卦标识法，不过，这种做法并不排斥当时有可能已经出现了用数序爻题的形式来编列爻辞的情形。根据前述的两条证据，可以认为至迟从战国中期开始，这两种标识法就并存于《周易》占筮术和传统易学中。二者的差别在于变卦标识法用于易学层次较高的交流场合，而数序爻题则用于文本编列和普通的易学交流场合。

②数序爻题有早出的可能。如果考之以变卦规则，不难发现变卦关系中除了一爻变和六爻变之外，还有二爻变、三爻变、四爻变、五爻变和静爻等共7种情形。其中一爻变、三爻变、五爻变、六爻变和静爻情形在《左传》或《国语》的筮例中有相关记载，可证变卦占法的存在。虽然这两部书中的相关占例以一爻变为主（参看本书表5

—1），可能与施占时流行用变卦的方式标识繇辞出处有关，但就检索顺序的标识来看，对本卦而言，也只能用一爻变或五爻变来标识爻辞和用六爻变来标识用辞，以及用静爻来标识卦辞这四种情形具有一一对应的可行性，而其他变卦情形都只是用于变卦占法，并不具备可用于标识爻序的一一对应的特点[注7]。虽然变卦标识法同时具备了卦象（指本卦卦象）和爻题的双重功能，但容易发现这种方式并不便于在《周易》文本中作爻题使用。因此，不论是否存在变卦标识法，在繇辞文本中都完全有可能存在着使用数序爻题的需求。注意到用数序标识爻序非常简单和直观，像这种从 1～6 的数序标识能力，殷商时期甚至更早以前的先民们就已经掌握了，表明存在着发明数序爻题的条件。既有需求又有条件，可知数序标识法不见得会比变卦标识法晚出。另一方面，与数序爻题相比，用变卦关系描述爻序要复杂得多，因而具有比较浓郁的神秘效果，似乎更加适于释占应用和丰富易学内容。可见变卦标识法虽不能用于繇辞文本的辞条编列，但却常用于专业层次更高的释占表述和易学交流。然而，相应地，要掌握变卦标识法的一一对应的规律，需要筮者具有更强的数学能力。所以，变卦标识法的发明晚于数序标识法的发明是很有可能的。在左丘明的笔下，蔡墨显然是长于变卦占法的占筮家，用变卦关系说明繇辞出处应是蔡墨十分熟悉也最能展现其占筮能力的做法，这也许是左氏强调变卦标识法的原因之一。再考虑到《左传》中记录的这些出自《周易》的辞语，目的都是引用繇辞中与龙有关的内容，并非对整条繇辞的列写，于是书中缺失或并不引出数序爻题似在情理之中。或者说，我们并无理由肯定蔡墨所用的《周易》古经是一种没有爻题的文本。相反，我们更有理由相信，在蔡墨所用的《周易》文本中是有爻题设置的，只是他不屑于使用罢了。

由此看来，先秦时期通过标识《周易》卦爻顺序以检索繇辞的方法至少有两种：一种是“某卦某爻”的双重标识法（包括前述的三重标识法），其中的爻序用数序爻题来确定。另一种是“某卦之某卦”的变卦标识法，其中的本卦爻序用一爻变的形式来确定。从使用功能上看，很可能前者主要用于《周易》文本，而后者由于不能记诸《周易》文本，因而只存在于占筮活动的语言交流中，或者存在于与《周易》占筮术有关的一些文字表达中。从数学的角度来看，双重标识法用数简单，充分显示出古代占筮家们在解决实用问题时的数学智慧，而变卦标识法虽然在双重标识的基础上发展出较为复杂的数学思维能力，但表现出来的或给人们以影响的却是更加浓厚的易学理解。这两种标识方法可以互不排斥而并存，而数序爻题因其简单适用，似乎出现时期较早的可能性要大一些。

1.4.2 《易经》释占繇辞中使用的数字

在传世的《易经》繇辞文本中出现的数字共有 9 种 46 个（不含标识爻题的序数和数字），具体是一（7 个）、二（2 个）、三（23 个）、七（3 个）、八（1 个）、九（1 个）、十（5 个）、百（2 个）和亿（2 个）。其数量虽然不多，构成也很简单，但由于语

义环境的不同，使它们的含义变得比较复杂，后人在解读这些数字时，往往因为出于语言文字，以及易学和哲学等不同视角的理由，而存有歧义。当然，下面的讨论基本上不涉及这方面的问题。

（1）繇辞中使用的数字

为了便于数学上的观察和讨论，不妨将出现于《易经》繇辞中各数的使用情况分类列出如下：

"一"（含"初"）（共7个）：

"初筮吉"（《蒙》）

"无初有终"（《睽》六三）

"载鬼一车"（《睽》上九）

"三人行则损一人，一人行则得其友"（《损》六三）

"若号一握为笑"（《萃》初六）

"射雉一矢亡"（《旅》六五）

"二"（含"贰"）（共2个）：

"樽酒簋贰"（《坎》六四）

"二簋可用享"（《损》）

"三"（共23个）：

"再三渎"（《蒙》）

"有不速之客三人来"（《需》上六）

"其邑人三百户"（《讼》九二）

"终朝三褫之"（《讼》上九）

"王三锡命"（《师》九二）

"王用三驱"（《比》九五）

"三岁不兴"（《同人》九三）

"先甲三日，后甲三日"（《蛊》）

"三岁不得"（《坎》上六）

"昼日三接"（《晋》）

"三日不食"（《明夷》初九）

"田获三狐"（《解》九二）

"三人行则损一人"（《损》六三）

"三岁不觌"（《困》初六）、（《丰》上六）

"革言三就"（《革》九三）

"妇三岁不孕"（《渐》九五）

"田获三品"（《巽》六四）

"先庚三日，后庚三日"（《巽》九五）

"三年克之"（《既济》九三）

"三年有赏于大国"(《未济》九四)

"七"(共3个):

"七日来复"(《复》)

"七日得"(《震》六二)、(《既济》六二)

"八"(1个):

"至于八月有凶"(《临》)

"九"(1个):

"跻于九陵"(《震》六二)

"十"(共5个):

"十年乃字"(《屯》六二)

"至于十年不克征"(《复》上六)

"十年勿用"(《颐》六三)

"或益之十朋之龟"(《损》六五)、(《益》六二)

"百"(共2个):

"其邑人三百户"(《讼》九二)(上海博物馆藏战国楚竹书《周易》中作"其邑人三四户",而长沙马王堆西汉帛书《周易》中仍为"其邑人三百户")

"震惊百里"(《震》)

"亿"(共2个):

"亿丧贝"(《震》六二)

"亿无丧"(《震》六五)

(2) 关于繇辞用数的讨论

①在这些数字中,有的表达了准确的数量。例如"载鬼一车"、"三人行则损一人,一人行则得其友"、"至于八月有凶"诸语句中的数字,一般都解读为车数、人数和月数的具体数量。然而有不少数字则被释为概数,例如"若号一握为笑"中的"一握",孔颖达在《周易正义》中疏之曰:"一握者,小之貌也,自比一握之间,言至小也。"其中的"一"被解读为极小或极少,并没有数量1的意思。又如"震惊百里"中的"百里",《周易正义》疏之曰:"窃谓天之震雷,不应止闻百里,盖以古之启土,百里为极。"其中的"百里"似乎有极大或极远之意,并非准确的一百里的距离。虽然在已发现的商周数字中,"百"是确定的进位字符,也可作为准确的数字使用,但出现于这条卦辞中的"百",似应解读为数量级在千以下的概数较为合适。因为震雷的声响再大,也不会传至千里之外。而且从商周甲骨文中可知,一般情况下,千和万都已经有了明确的进位量级意义,如果所涉概数的量级达到千位或更大时,用千或万来描述的可能性也许比较大。当然,这句繇辞也有可能源于尚未出现千和万的概念而用"百"描述极多的更为古老的时期。综合考虑,孔疏的确是较好的解释。

②还有一些数字的含义尚无一致的解释。例如"亿丧贝"中的"亿",有解释为感叹词"噫"的(虞翻、陆德明、孔颖达等),有解释为"臆",即"猜测"的(郭沫若

《周易时代的社会生活》)。当然，按照这样的解释，“亿”都与数没有关系。而那些与数有关的解释也有不明确的地方。例如，不少学者认为，“十万曰亿”或“百万曰亿”的说法均出现于先秦时期以后，表明从十进制记数法的进位情况来看，在个、十、百、千、万这5个进位量级之外，还难于明确西周时期“亿”的进位位置。因而，即使“亿”确实是一个出现于西周时期的表数文字，目前也并无充分理由将它界定为西周时期使用的某个确定的进位字符，同时也很难认为它是一种准确的数量描述。在这种情况下，将“亿”解读为比万要大许多的概数也许比较合适。

③从数字的出现频率来看，在46个数字中，“三”有23个之多，恰好占了一半，而其他几种数字的出现频率都不高。对于这种“三”字多出的现象，笔者倾向于认为，中国古人常用“三”的原因与他们记数能力的形成有关。在相当长的一段历史时期中，古代先民能突破不识数的蒙昧状态，学会从一数到二，然后再数到三，肯定是一件非常了不起的事情。后来的人们习惯于用“三”来表达“多”的概念，可视为远古遗风。《易经》文本中使用了如此之多的“三”，应当既有准确的记数，又有用作表示“多”的情形，后者便反映了这种源自远古的传统或习惯。另一方面，《周易》占筮术本是周人用来探测神意以判断人事吉凶的一种办法，在《周易》所用卦象的形成过程中又极有可能受到了早期占筮术中使用的3数占法和6数占法的影响（参看本书第2章的2.2.2节）。而从形态上观察，将两组3个数一组的筮数相重，便能形成由6个数构成的一组筮数。可见数“三”在古代占筮家的心目中还具有某种原始神学的分量，而且这种神学意识也应具有悠远的源头。这类长期相传的习惯和神学意识在中国传统文化的形成过程中很可能会产生一定的影响。例如，春秋战国时期出现的“道生一，一生二，二生三，三生万物。”(老子《道德经》)之类的观念，就可能与存在着这样的背景条件有一定的联系。

④与目前从商周甲骨文中已辨识出来的数字相对照，《易经》中的数字（含爻题用数）有两个特点：一是使用了从一到九共9个基本数字，以及十、百两个表示进位量级的字符，然而没有发现数0。这是相同之处。二是在与数量有关的描述中，既没有找到二位数和多位数的数字，又缺少千和万这两种表示进位量级的字符，虽然多出了亿字，但其含义并不明晰。这就显得《易经》中涉及数量描述的事物内容不够丰富，似乎与经文中不少材料的来源较为古老有关。这是不同之处。

缺失千、万和多位数的情形，似乎应该与《易经》中没有使用的需要或相关辞条无需涉及这类数字的情况有关，既不能简单地据以推断《易经》的作者不具备这样的数学知识，也不能孤立地据以认为《易经》成书于殷商以前还没有发明出多位数的时期。因为《易经》文本只是《周易》占筮术中的一个构成部分，经文中的数字所反映的数学知识应该只是占筮家们所掌握的数学知识的一部分。事实上，通过本书的讨论，我们将发现西周时期的占筮家们在起卦算法和卦象的发明中，展现了令人惊叹的数学智慧。这种数学智慧的来源虽然古老，但却是数学知识积累到一定程度且出现了应用需求的条件下才有的事物。

在《易经》文本中没有发现数0，与中国古代流传使用的文字记数方法中无需配置数字0的情形相符。或者说，由于中国先秦时期的文字记数系统在不使用数0的条件下，用9个基本数字和表示进位量级的十、百、千、万4种数符，就可以准确地表述十万以内的正整数，并能与当时求数运算所得结果的记录相适配。这种情形还表明，《易经》中所使用的记数方法与商周甲骨文中使用的没有数0的记数方法是协调相容的，甚至可以认为是相同的。而且，甲骨文中若干实际应用的情形还显示出，只要依循相应的规则，在一般情况下这是一套不会产生歧义的记数办法，能够满足当时社会生活中的文字记数需求。可见，这套不使用数0的记数办法在秦汉以后仍被长期使用是有渊源的。当然，由于没有表示0的数字，这套缺乏数学规范性的记数文字不能用于笔算类型的求数运算（参看本书第8章8.5.2节）。

⑤繇辞用数表明，《易经》经文有着古老的来源。还应指出，与爻序用数全是准确数值不同，在繇辞经文中出现的个位数以及十、百、亿诸数，用于表述准确数值的情形虽然不少，但是学者们在解释经文时，对一些即使具有明确的字面含义的数字常有释为概数的倾向，往往不将它们界定为准确数量的描述。例如前述孔疏对“一握”的解释便是如此。这就显示出《易经》的经文对数字的使用存在着相对粗糙的情形，不像爻序用数那样明晰准确，容易形成经文中的一些内容具有久远来源的提示。也就是说，根据数字应用的特点，可以推测《易经》中有的经文的来源比较古老。关于《易经》经文有着古老渊源的认识，历代学者多是根据对经文内容的推考形成的，现在，通过对经文所用数字的讨论也得出了相容不悖的结果。

关于《易经》成书的时期，虽然尚难做出确切的结论，但是从已有的资料和学者们的研究结果来分析，可以认为该书的形成历经了一段不能算短的过程，经文中存在着一些来源古老的内容便可为证。不过，经文中含有古老的内容并不等于所有经文都写成于远古。笔者倾向于认为，《易经》的经文繇辞中除了西周占筮家们编写的内容之外，还沿用了一些商代甚至更早时期的材料。或者说，关于《易经》最后定型时期的讨论，还应该注意到经文繇辞的编定似乎必须与起卦算法的改进定型，以及传世卦象的形成时期相适配，不大可能在筮算方法和卦象构形尚无基本轮廓的情况下，其经文部分先已定型为传世的形态。当然，关于起卦算法的定型时期，以及卦象的形成时期，都是本书将要讨论的内容，尽管难以判断上限，仍可推测其下限都不迟于西周晚期（参看本书第6章的6.1节）。

注　释：

［注1］　朱熹、蔡元定在《易学启蒙·考变占第四》中说：“凡卦六爻皆不变，则占本卦彖辞，而以内卦为贞，外卦为悔。一爻变则以本卦变爻辞占。二爻变则以本卦二变爻辞占，仍以上爻为主。三爻变则占本卦及之卦之彖辞，即以本卦为贞，之卦为悔。前十卦主贞，后十卦主悔。四爻变则以之卦二不变爻占，仍以下爻为主。五爻变则以之卦不变爻占。六爻变则乾坤占二用，余卦占之卦彖辞。”

［注2］　参看李学勤《周易溯源》（成都：巴蜀书社，2006）第18页。2001年，考古工作者在陕西长安县西仁村西周窑址采集到四件陶拍，其中两件的柄部分别刻有六数筮数四组和两组。如果

按奇阳偶阴将它们转换成卦象，则可分别按序排为《师》《比》《小畜》《履》四卦，以及《既济》《未济》两卦。李先生指出，这种排序“全然与传世《周易》卦序相合”（指《周易》第 7、8、9、10 四卦和第 63、64 两卦），且存在易学中所说的“互覆”关系。对此，李先生认为“这样的顺序排列……不是偶然的巧合”，并推导出“传本《周易》那时业已存在”的结论（同上书，第 237 页）。不过，从功能上分析，这些筮数用到了一、六、八这三种数字，与卦象相比较，按照阳爻写为一，而阴爻既可写为六，又可写为八的设想，除非对六、八两数的使用存在某种特殊规定，含有阴爻的卦象便可以有多种筮数写法。例如全由阴爻构成的《坤》卦，像这样用六、八表示阴爻的筮数写法就有 64 种之多。如果用这种筮数形式的卦象来列写繇辞，对应辞条的数量远比《周易》所列的 450 条要多，必将难于建立可供传世《周易》应用的排序规则，可见不能简单地将这些筮数等同于传世卦象。也许对那时的繇辞进行排序的考虑，是促成占筮家们将筮数转化为卦象的一种动因，并且这一过程的开始可能比较早，然而其完成（或者说传本《周易》的定型）似乎不在西周早期。尽管在这一转化过程中，筮数列写与卦象排序出现局部的“相合”是有可能的，但要得出“传本《周易》那时业已存在”，以及诸如“这种数字卦也应是由六十四卦组成”（廖名春：《长安西仁村陶拍数字卦解读》，载《周易研究》2003 年第 5 期）之类的结论，似乎还需要提供更加充分的依据。

［注 3］　参看杨庆中《周易经传研究》（北京：商务印书馆，2005）第 86～107 页。虽然杨先生在《周易经传研究》中也注意到卦象的形成应与《易经》的结构相符，并认为“由筮而数，由数而卦，是一条比较可信的发展思路”。（语见第 8 页）如果认为筮数与卦象之间存在着差别而不是径直将筮数视为卦象的话，由于迄今为止的考古发现表明，殷商和西周时期的甲骨金石陶器上有不少筮数记录，却尚未找到存在着卦象的确凿证据，因而可以理解为杨先生似有西周早期尚无卦象的意思。但是从其“《史记》文王演《易》之说当非空穴来风”（语见第 12 页）的说法来看，却又似有卦象的形成时期不晚于西周初期的意思，从而显示出杨先生对六十四卦形成时期的问题并无具体的研究结论。

［注 4］　杨军先生在《周易文化大学讲稿》（中国人民大学出版社 2007 年 9 月版）中认为：“《周易》成书的时间应该以占《周易》经文主体部分的卦爻辞的出现时间为准，而与卦画出现的时间关系不大。”（第 15 页）其实，《易经》中 450 条繇辞的编定与六十四卦的形成应该是有关系的。杨先生的上述判断应以卦象先已形成为条件才好理解。如果卦象后出，在卦象形成之前，就需要用别的办法来列写这 450 条繇辞，而这是一件可能性很小的事情。果然，杨先生接下去又说：“《周易》经文部分大约成书于商末周初，其作者很可能是周文王或周公。其中包含的思想可以上溯到夏商两代甚至夏王朝建国以前，特别是卦画，当出自夏代以前甚至早到距今五千年以前。”（第 17 页）由于古代文献中一些关于八卦和六十四卦出现时期早于西周中期的说法带有明显的猜测性质，甚至属于传说和神话故事中的内容，据之可以肯定卦象的形成有着悠远的历史，但若用作卦象定型时期的断代依据则宜慎重。由于目前还没有找到学术界一致认同的考古证据，所以关于卦象定型时期的推考，学者们不惟对其上限难于界定，就是下限也有诸多不同看法。杨先生推测卦象“当出自夏代以前”，便是其中有待考证的看法之一。至于西周以前的卦画是用什么方法求取的问题，杨先生则没有予以考虑。

［注 5］　按照变卦标识法，《乾》卦第三爻和第四爻可分别标识为《乾》䷀之《履》䷉和《乾》䷀之《小畜》䷈，但这两爻下的爻辞均与龙无关，故蔡墨未引。其他亦然。

［注 6］　除一爻变和六爻变之外，静爻和五爻变的情形也可用于变卦标识法。由于六十四卦中的每一卦都配有一条卦辞，而六十四卦又都各有惟一的一种静爻情形，如果将与静爻有关的变卦标识用来表示各卦卦辞的话，则适用于所有卦象。因而用静爻的方式表述卦辞的位置，可视为变卦标识法的内容。《左传·昭公七年》所记“孔成子以《周易》筮之，曰：‘元尚享卫国，主其社稷。’遇《屯》䷂……史朝曰：‘元亨，又何疑焉？’”是依静爻索取《屯》卦卦辞“元亨，利贞。勿用有攸往。

利建侯”的例证。而五爻变就是只有一爻不变，理论上同样具有与本卦爻辞一一对应的特性，可以用于变卦标识法以标识爻辞。不过，《左传・襄公九年》所记“遇《艮》䷳之《随》䷐”是五爻变，不变的爻符是《艮》六二，但索用的却是《随》卦的卦辞“元亨，利贞。无咎”，从中看不出索辞规律。除此之外，在笔者所知的先秦古藉中尚无用五爻变标识爻序的例证，因而用五爻变做爻辞标识只是一种理论上的判断。

［注 7］ 根据传世的变卦规则，不难判断，对六十四卦中的任何一卦来说，都有 64 种变卦情形，其中静爻和六爻变各有 1 种，一爻变和五爻变（就标识法而言五爻变等价于一爻变）各有 6 种。因为只有这几种情形具有关于卦象及爻序的一一对应的特性，从而理论上可供变卦标识法使用的变卦情形最多只有 14 种。而对应于二爻变（有 15 种）、三爻变（有 20 种）和四爻变（有 15 种）的 50 种变卦情形，由于没有关于卦象及爻序的一一对应的性能，则不能用于变卦标识法。至于朱熹和蔡元定在《易学启蒙・考变占第四》中提出的变卦索辞规则，可视为解决变卦索辞时必然会遇到的不确定性问题的一种方案。

参考文献：

［1］江晓原，钮卫星．中国天学史．上海：上海人民出版社，2005．250～252
［2］李零．中国方术考．上海：东方出版社，2001．88
［3］荆州地区博物馆．江陵王家台十五号秦墓．文物，1995（1）
［4］皮锡瑞．经学通论．上海：中华书局，1954．9
［5］杨庆中．周易经传研究．北京：商务印书馆，2005．155
［6］张涛．秦汉易学思想研究．上海：中华书局，2005．23～43
［7］李学勤．周易溯源．成都：巴蜀书社，2006．325
［8］湖南省博物馆．长沙马王堆二、三号汉墓．北京：文物出版社，2004

第2章 《周易》占筮术使用的卦象

《易》有大极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。

——《易传·系辞上》

兼三才而两之，故《易》六画而成卦。

——《易传·说卦》

作为揲算结果数的符号化记录，八卦和六十四卦是《周易》占筮术中特有的卦象符号系统。卦象的构成规律、卦象形成过程的推测和卦象的数学特点是本章将要介绍的主要内容。

2.1 卦象的构成

《周礼·大卜》将《连山》《归藏》《周易》三种占筮术统称为三《易》，由“其经卦皆八，其别皆六十有四”的说法，可知使用八卦和六十四卦卦象是这三种占筮术的共同特点。一些学者认为《连山》《归藏》出现于夏商时期，似乎卦象的发明也很早。但在这三种卦占中只有《周易》流传至今，其余两种则失佚不传，因而在找到更早时期即已存在卦象的考古证据之前，仍然宜于认为传世的八卦和六十四卦的构形出自《易经》文本之中。

2.1.1 八卦和六十四卦

卦象是揲算结果数按奇偶性质分类转换后形成的符号化记录，是《易》占特有的一套符号系统。传世的卦象有八卦和六十四卦两种类型，它们都由称为“爻”的基本符号构成。爻符共有两种，画做“——”的爻符称为阳爻，画做“－－”的爻符称为阴

爻。爻符既不是文字，也不是数字，它是《易》占专门用来构成卦象的符号。

在可重复使用阴阳两种爻符的条件下，如果将 3 个爻符竖向排列起来，一共有 8 种不同的排法，这样得到的卦象序列称为八卦。八卦的 8 种卦象和古代占筮家们为它们所取的名称如下：

☰乾 ☷坤 ☳震 ☴巽 ☵坎 ☲离 ☶艮 ☱兑

类似地，若用 6 个爻符竖向排在一起，一共有 64 种不同的排法，这样得到的卦象序列称为六十四卦。显然，采用将八卦两两相重的办法，也可以得到所有可能出现的 64 种不同的卦象。按今本《周易》的顺序，六十四卦的卦象和名称如下：

䷀乾	䷁坤	䷂屯	䷃蒙	䷄需	䷅讼	䷆师	䷇比
䷈小畜	䷉履	䷊泰	䷋否	䷌同人	䷍大有	䷎谦	䷏豫
䷐随	䷑蛊	䷒临	䷓观	䷔噬嗑	䷕贲	䷖剥	䷗复
䷘无妄	䷙大畜	䷚颐	䷛大过	䷜坎	䷝离	䷞咸	䷟恒
䷠遁	䷡大壮	䷢晋	䷣明夷	䷤家人	䷥睽	䷦蹇	䷧解
䷨损	䷩益	䷪夬	䷫姤	䷬萃	䷭升	䷮困	䷯井
䷰革	䷱鼎	䷲震	䷳艮	䷴渐	䷵归妹	䷶丰	䷷旅
䷸巽	䷹兑	䷺涣	䷻节	䷼中孚	䷽小过	䷾既济	䷿未济

六十四卦中，每一个卦象都由 6 个爻符构成，为确定爻符的位置和阴阳属性，有“爻题”的设置。在每一个卦象中，爻题的编排顺序都是从下至上，因而爻符的位置题名从下至上依次为“初”、“二”、“三”、“四”、“五”、“上”。爻符的阴阳属性题名的取法规则是阴爻为“六”，阳爻为“九”。在这里，第一爻不称“一”或“下”，而是称为“初”。第六爻不称为“六”，而是称为“上”。此外，爻题写法是“初”和“上”放在六、九之前，而二、三、四、五放在六、九之后。下面以《乾》《坤》《既济》《未济》四卦为例，说明《周易》占筮术中爻题的传统记法：

《乾》：	《坤》：	《既济》：	《未济》：
上九——	上六－－	上六－－	上九——
九五——	六五－－	九五——	六五－－
九四——	六四－－	六四－－	九四——
九三——	六三－－	九三——	六三－－
九二——	六二－－	六二－－	九二——
初九——	初六－－	初九——	初六－－

有了卦名和爻题，就可以准确无误地界定任何一个爻符的位置和阴阳属性，形成一套严格有序的编码索引系统。例如“《既济》卦九五爻”便是《既济》卦的卦象中从下向上数的第 5 个爻符，这个爻符是阳爻。

由于六十四卦可以用八卦两两相重而得，故习惯上又将六十四卦的卦象用两个相

关八卦的卦名来描述。例如《乾》卦的下卦是《乾》，上卦也是《乾》，故描述为“《乾》下，《乾》上”。又如《既济》卦的下卦是《离》，上卦是《坎》，故描述为“《离》下，《坎》上”。通常下卦又称为“内卦”或“贞卦”，上卦又称为“外卦”或“悔卦”。

说卦象和爻符构成了一套编码索引系统，是因为《易经》中列写了释占繇辞共计450条，为便于查取，它们得有一个目录。这些繇辞中的卦辞共有64条，对应于64种卦象，每卦配置1条。爻辞共有384条，对应于6×64＝384个爻符，每个爻符配置1条。《乾》《坤》两卦比较特殊，于卦爻辞之外，每卦另配一条“用辞”，分别称为“用九”和“用六”。所以一共有64＋384＋2＝450条繇辞。占筮时，有一套由揲算得出卦象，以及确定用这个卦象中的某个爻符作占的规则，这样便可检索出对应的繇辞。当然，在实际占筮中，所涉卦象、爻符和繇辞一般都是解释神意的基本依据。在占筮活动和易学研究中，卦象和爻符都具有特殊的占筮功能和易学意义，占筮家和易学家们并不将它们单纯地看成是一种用于编排或检索繇辞的目录系统。正因为如此，在用《周易》占筮术求占时需要占者考虑多方面的因素才能顺利释占，同时也为占者获得了较为宽阔灵便的释占空间。在这样的背景下，历代曾产生出许多易学家和各种易学流派，显然是很正常的现象。

关于传世六十四卦的排序特征，除了附会于事物之间的因果关系（例如《易传·序卦》中就有诸多“托象以明义”的说法）之外，最为重要的界说出自唐代学者孔颖达《周易正义·周易序卦》中的疏文，其文云：

> 二二相耦，非覆即变。

这句话的意思是成对地观察传世六十四卦的卦象，根据卦象的构成可以发现其排序具有“非覆即变”的规律。对此，可作下述讨论：

（1）**“覆”**

在两种卦象之间有时存在爻符顺序互为倒置的关系，易学家们将这种情形称为“覆”。例如《屯》䷂与《蒙》䷃、《需》䷄与《讼》䷅、《师》䷆与《比》䷇等等，均存在互“覆”的关系。细心点数，共有28对56卦。按照传世卦象的排序方式，这28对互“覆”的卦象都是成对地列写的，但是在对与对之间并无严格一致的顺序规律。显然，在具有互“覆”特性的卦象中，卦内的6个爻符不可能具有上下对称的构成。

（2）**“变”**

如果两种卦象中爻符的阴阳性质存在对应相反的变化关系，易学家们将这种情形称为“变”。例如《乾》䷀与《坤》䷁、《丰》䷶与《涣》䷺、《旅》䷷与《节》䷻等等，都是互“变”的卦象。实际点数，正好是32对64卦。事实上，在用阴阳两种爻符构成6画的64种卦象时，任何一种卦象都对应着一个且仅有一个与它有“变”的关系的卦象，基于这种对称性，不难判断64种卦象必然组成32对具有互“变”关系的

卦对。但是在传世卦象的排序中，由于古代占筮家们首先考虑了成对地列写互“覆”的卦象，因而这 32 对互“变”卦象中的大多数都不能成对地列写在一起。

（3）只“变”不“覆”

成对列出的只“变”不“覆”的卦象一共有 4 对 8 种，它们是《乾》䷀与《坤》䷁、《颐》䷚与《大过》䷛、《坎》䷜与《离》䷝、《中孚》䷼与《小过》䷽。而其余的 56 卦则构成 28 对“覆”卦。显示出传世六十四卦的排序列写具有以“覆”为主而以“变”为辅的特征，即前述的“非覆即变”。由于 64 种卦象中有且仅有这 8 种具有上卦与下卦对称的构成（或者说卦内的 6 个爻符是上下对称的），它们可以组成 4 对互“变”的卦对，却只能与自身相“覆”，而不能与其他卦象互“覆”。所以，只“变”不“覆”的情形仅此 4 对。

（4）既“覆”又“变”，以及只“覆”不“变”

在今本六十四卦的排序中，比较有趣的是《泰》䷊与《否》䷋、《渐》䷴与《归妹》䷵、《既济》䷾与《未济》䷿、《随》䷐与《蛊》䷑这 4 对卦象，它们都属于既“覆”又“变”的情形，由于“覆”卦都是成对地列写的，所以它们也是成对地排列的。如果从 28 对“覆”卦中将它们减掉，可知只“覆”不“变”的卦象共有 25 对。

显然，在传世六十四卦的卦序排列方式中，存在着明确的“覆”、“变”关系，足以说明这种排序不是杂乱无章地随意列写，而是占筮家们通过认真的研究，在对卦象间的“覆”、“变”关系获得了比较完整了解的条件下才列写出来的。注意到上海博物馆所藏楚竹书《周易》的残存简文中有 8 组互“覆”卦象附有成对的专用符号（参看濮茅左《楚竹书周易研究》，上海古籍出版社，2006 年 11 月版，第 31 页）。说明“覆”的概念在公元前 300 年左右的战国时期已有确凿踪迹。在这批楚简中虽然没有发现具体的“覆”、“变”之说，但是笔者推测，这样的概念很可能产生于卦象定型的时期，并成为当时使用的一种卦序列写方式的依据，且流传至今。所以，不宜认为“覆”、“变”概念是唐代孔氏的创建。

这样，不仅是在卦象的构成中，我们在今本卦象的排序和列写中也能观察到先秦时期古代占筮家们的数学智慧。

在长沙马王堆汉墓出土的帛书《周易》中，六十四卦的排序和传本《周易》不同。汉帛《周易》的卦序不按“非覆即变”的关系排出，而是按《乾》《艮》《坎》《震》《坤》《兑》《离》《巽》的八卦顺序，用八卦相重的方法列写出上卦和下卦的方式排出六十四卦的卦序。对此，高亨先生在《周易大传今注》（齐鲁书社，1998 年 4 月版）中指出：

> 足证明古代《易经》之六十四卦顺序当有几种不同之编次。（第 4 页）

并且认为：

> 此种顺序在占筮时得到某一卦与变为某一卦，易于寻检《易经》文本，只合于巫术之需要，不具有哲学之意义。（第 9 页）

这显然是一种没有从数学的角度进行考虑而作出的判断。一方面，对变卦占法（参看本书第 5 章 5.1 节关于变卦占法的介绍）来说，任何一种本卦排序对繇辞寻检的难易影响并无明显差异。如果帛书卦序更“易于寻检”的话，理当取代传本卦序，可是事实证明，使用《周易》占筮术的占筮家们个个都能熟练地用传本卦序完成变卦占筮，而帛书卦序反而失传。

另一方面，认为帛书卦序“只合于巫术之需要，不具有哲学之意义”也似乎欠妥。应当说，在帛书卦序中同样可以观察到原始形态的组合数学思想的具体应用情形，由于这种情形可以与《易传·系辞》中“八卦成列……因而生之……”的易学观念相联系，所以，其哲学意义似乎可以更好地体现在对“相错”、“相荡”等易学概念的形成所做的讨论中。

由于卦象内部和卦象之间存在着与爻符构成有关的各种对称关系和变化规律，必然会引起学者们的关注，并从各种角度加以讨论。从一些文献来看，历代学者的论述大体上是在易学的框架下展开的，而现代学者们则从逻辑学和美学等方面进行了研究。例如，在朱伯崑先生主编的《周易知识通鉴》（齐鲁书社，1993 年 12 月版）中，学者们在介绍“易学中的思维方式”时，有不少内容便与卦象的构成有关。又如刘纲纪先生在《周易美学》（武汉大学出版社，2006 年 10 月版）一书中，就从美学的角度对卦象的构成进行了讨论，他认为：

> 在变化中求对称，在对称中求变化，与现代图案所讲的基本理论十分切合。（第 212 页）

2.1.2 卦象的象征意义

通常情况下，将卦象用于释占时需要预先知道各种卦象的象征意义。《易传》中有不少相关的说明，其中以《说卦》对八卦中 8 种卦象的象征意义的界定最为基本：

> 《乾》为天、《坤》为地、《震》为雷、《巽》为风、《坎》为水、《离》为火、《艮》为山、《兑》为泽。

不难看出，这种取象意义的起源可能十分古老。在古人对自然环境和生存条件的基本认识中，天地最为广大，水火均不可或缺。而天与风，地与山，水与泽，火与雷之间又互有联系，在古代极为直观和朴素的条件下，将这些因素作为八卦的象征意义是很

自然的事情。以此为基础，后来又衍生出更多的象征意义，例如《易传·说卦》云：

《乾》为天、为圜、为君、为父、为王、为金、为寒、为冰、为大赤、为良马、为老马、为瘠马、为驳马、为木果。

等等。这样，释卦时就有了较大的分类或比附空间，以适用于各种不同求占问题的解答。

传统易学认为，六十四卦是在八卦的基础上发展而成，因而六十四卦的卦象含义有不少是八卦卦象含义的引申。例如《既济》的卦象是《离》下《坎》上，《易传·象》就说："水在火上，既济。"这是因为在八卦中，《离》为火，《坎》为水，烧水做饭或者以水灭火时均为水在火上，是很正常的现象，因而占得《既济》卦时，多有吉利之辞。反之，《未济》的卦象是《坎》下《离》上，因而《易传·象》说："火在水上，未济。"由于水烧不热，或者火灭不熄，象征着办事不顺利，所以占得此卦时多有悔吝不吉之辞。当然，《周易》占筮术特别讲究变易，如何引申卦象含义以用于释占并不像上例这样简单，而是《周易》占筮术和易学研究中的专门内容。此外，爻符在卦象中的位置和阴阳属性在易学中或占筮家的眼中都有独特的象征意义，通过它们怎样去判断所占之事的吉凶悔吝，也有各种流派的易学说法，一般难于做出简略的概括。总之，依照揲算得到的卦象和爻符以及对应的繇辞进行释占时，存在一些传统的规则或做法，同时也有一定的灵活变通空间，不可一概而论。事实上，从汉晋时代起，就逐步形成了象数派和义理派等各种易学流派，对怎样释卦，从来都没有形成过统一的明确规定。由于本书并不讨论易学理论或释占方法，故不再作详细的介绍，有兴趣的读者可以参阅其他相关的书籍。

2.2 卦象形成过程的推测

考古研究表明，在已有的西周及更早时期的文物中，还没有发现与传世卦象相同的符号。但是没有发现并不等于在这段历史时期还没有形成这样的卦象，因而关于卦象形成过程的描述和卦象形成时期的界定并无一致的意见。传统易学依据《易传·系辞下》中伏羲"始作八卦"和《史记·周本纪》中文王"盖益《易》之八卦为六十四卦"的说法，认为八卦是古圣人仰观俯察自然现象后的创制，而六十四卦大概是在商周之际由八卦演绎而成。除此之外，学者们还从多种角度探讨了卦象的起源，提出了若干假说或推论。例如，认为八卦是由早期文字演变形成，或是由结绳记事时代绳结的有无演变形成等等。笔者根据目前所知的一些材料，推测卦象应当是占筮术发展到一定阶段后出现的事物。构成卦象的阳爻和阴爻两种爻符的形成，可能与早期占筮术中筮算结果数记录方法的改变及演进有关。或者说卦象是随着《易》占类占筮术的优

化改进而形成的。就卦象的形制和构成规则而言，八卦和六十四卦的定型时期估计都不迟于西周晚期，而且似乎与揲算的改进定型有一定的关联。至于其上限，要等到有了新的考古证据以后才能作出结论。

2.2.1 《熹平石经》中的卦象

目前所知，与传世六十四卦的卦象完全一致的考古发现，以东汉末《熹平石经·周易》残片上的石刻卦象为最早。根据《后汉书·蔡邕列传》的记载：

> 邕以经籍去圣久远，文字多谬，俗儒穿凿，疑误后学，熹平四年（公元175年），乃与五官中郎将堂谿典，光禄大夫杨赐，谏议大夫马日磾，议郎张驯、韩说，太史令单飏等，奏求正定六经文字。灵帝许之。邕乃自书丹于碑，使工镌刻立于太学门外。于是后儒晚学，咸取正焉。

当时共刻7经46碑，有20万余字，立于洛阳太学讲堂的东西两侧（位于今河南偃师汉魏故城南），隋唐后原碑湮没不存，后世陆续发现的均为残石。其中《周易》卦象共得11个，其画法与传世卦象的画法完全相同。因此，传世卦象的定型时期必在东汉以前（图2—1）。

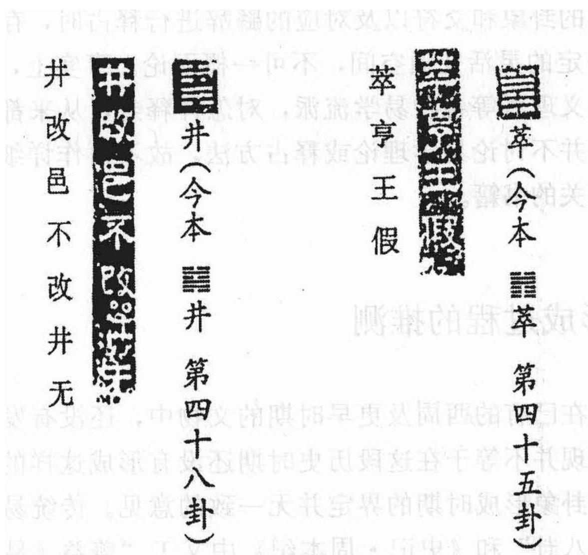


图2—1 《熹平石经》残片上的卦象（二例）

（引自濮茅左《楚竹书周易研究》）

2.2.2 商周时期的“筮数”

北宋重和元年（公元1118年），安州（今湖北孝感）出土6件青铜器，史称“安

州六器”，为周初昭王时期所铸。其中的中方鼎在铭文之末铸有两组竖向排列的数字铭文：七八六六六六、八七六六六六（参看本书图 6—1），历代学者均不识其意。在商周时期的文物中，类似的数符组后来陆续多有发现[注1]，尤其是在对甲骨文的识读中亦发现了多例，从而引起了不少学者的注意（图 2—2 和图 2—3）。不过，从宋代直到民国时期，学者们常常将这类由数字组成的符号视为未能识读的古文字或族徽符号。将这类数符联系于占筮术，则是 1950 年代以后的事情。1956 年，李学勤先生在《谈安阳小屯以外出土的有字甲骨》（《文物参考资料》，1956 年，第 11 期）一文中曾经猜测这些符号似与《周易》占筮术中的九、六之数有关。1957 年，唐兰先生在《在甲骨金文中所见的一种已经遗失的中国古代文字》（《考古学报》，1957 年，第 2 期）一文中曾明确指出，这些符号是由一、五、六、七、八等数字组成，但是他认为这是一种族徽性质的久已失传的少数民族文字。1978 年 12 月，张政烺先生在参加《吉林大学古文字学术讨论会》时作了《古代筮法与文王演周易》的发言，将这些数符组释为“易卦”，直接将它们与《周易》占筮术联系在一起。

表 2—1　　出土筮数的组数统计

时期	载体类型	3 数一组的组数	4 数一组的组数	6 数一组的组数
晚商	卜甲、卜骨	2	1	6
	青铜器	18	0	1
	石器、陶器	1	0	17
	小计	21	1	24
西周	卜甲、卜骨	0	0	23　其中早期 6 组、中期 2 组，其余待定。
	青铜器	13　全部为早期。	0	10　其中早期 9 组、中期 1 组。
	石器、陶器、骨器	6　其中早期 3 组，其余待定。	0	21　其中早期 1 组、晚期 1 组，其余待定。
	小 计	19	0	54
东周	青铜器	2	0	0
合计 121 组		42	1	78

目前，许多学者都认为这些数符组是当时与占筮有关的记录，并称之为“数字卦”或“筮数”。根据濮茅左先生在《楚竹书周易研究》一书中汇集的资料，在商周时期的甲骨文、金文和其他契刻文字中，这样的数符组共有 121 组（不含形如爻字的数组）。[1]在这 121 组筮数中，3 个数字一组的有 42 组，4 个数字一组的有 1 组（张政烺先生认为有 4 组[2]），6 个数字一组的有 78 组。分类统计参看表 2—1。

从表 2—1 中可以归纳出下述特点：

（1）筮数集中出现于晚商至西周时期

目前所知的筮数基本上都出现于晚商和西周时期的文物中，在年代更早的出土文

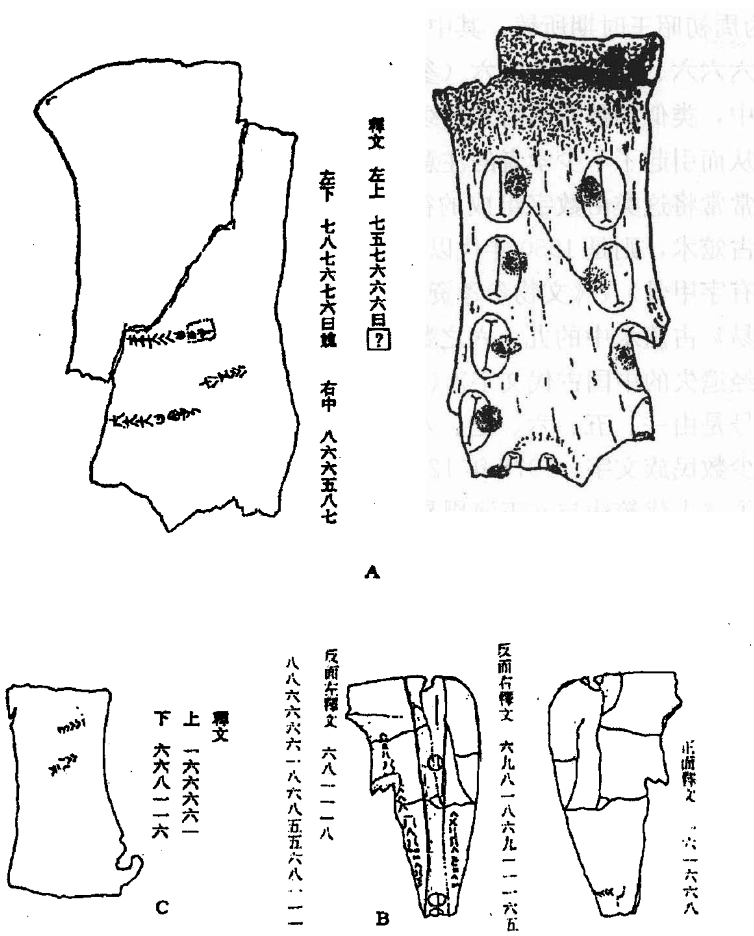


图 2—2　卜骨上的筮数

A：晚商；B：西周；C：西周

（引自濮茅左《楚竹书周易研究》）

物中尚未发现筮数。而从西周晚期起，出土筮数明显减少，东周筮数已很罕见，进入秦汉则完全不再有筮数出土[注2]。需要说明的是，战国楚墓（指天星观、包山和葛陵楚墓）出土的占筮简中记有卦象 23 组 46 卦，有的学者认为它们都是筮数[3]，而有的学者则认为它们都是卦象。本书将在第 6 章的 6.2 节讨论这个问题，结论倾向于认为它们都是早期的卦象而不宜释为筮数，因而表 2—1 中没有将它们列入。

（2）西周时期的筮数多出现于西周早期

在已知的西周筮数中，属于西周早期的为数不少，特别是青铜器上的筮铭，23 组筮数中仅有 1 组属于西周中期，其余 22 组全部出于西周早期。如果认为这是由于西周中、晚期已逐步实现了由筮数转化为卦象的结果，应当是合乎情理的。但何以在西周时期的出土文物中至今没有发现那时的卦象记录，则成了关键的问题。鉴于占筮行为不可能中断，因而笔者怀疑，是不是在占筮结果数的记录方式上发生了变化。原来是

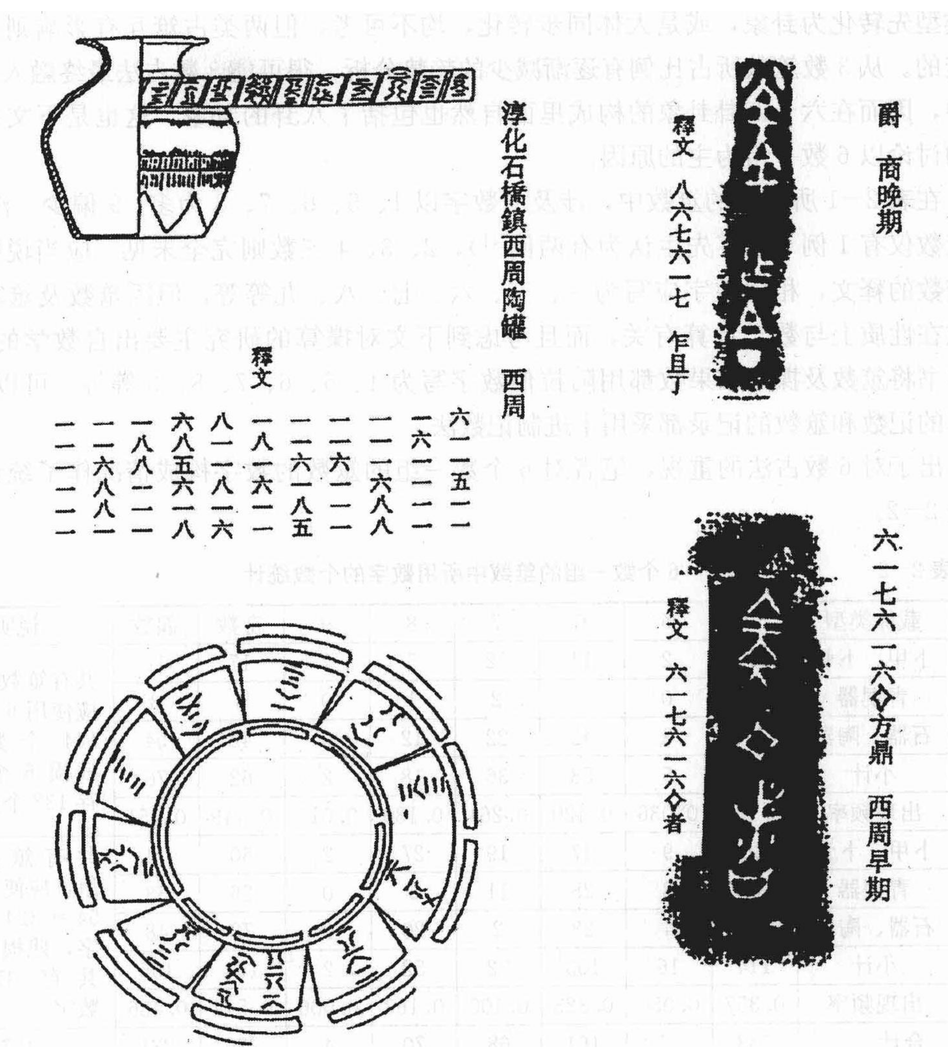


图 2—3　青铜器和陶器上的筮数
（引自濮茅左《楚竹书周易研究》）

随占随刻，或由于某种原因需刻记筮数，而且是直接刻在甲骨、铸型或陶坯上，当然也有可能记于简牍或布帛上。到了西周中期或晚期，在卦象的形成过程中正好遇上了只用或改用简帛记录筮算结果，而不再刻诸金石及甲骨，因而筮数也好，卦象也好，都用记于简帛上的方式做相关记录。由于简帛类的载体不易保存，所以现在已不可能再见到它们了。注意到在传世文献和出土文物中画有卦象的最早记录出现于东周时期，例如《左传》所记和战国楚墓的占筮简上的卦象以及上海博物馆从香港文物市场购回的战国简本《周易》都能证实这一点，可知由筮数向卦象的转化过程极可能是在西周晚期内完成的。

（3）存在两种类型的占筮方法

3 数一组的筮数与 6 数一组的筮数有并存现象，似乎表明占筮方法有两大类型。哪

种类型先转化为卦象，或是大体同步转化，均不可考，但两类占筮互有影响则是可以肯定的。从3数筮数所占比例有逐渐减少的趋势分析，很可能3数占法最终融入6数占法中，因而在六十四卦卦象的构成里面自然也包括了八卦的卦象，这也是下文关于筮数的讨论以6数一组为主的原因。

在表2—1所统计的筮数中，涉及的数字以1、5、6、7、8为多，9偏少，涉及10的筮数仅有1例（李零先生认为有两例[4]），2、3、4三数则完全未见。应当说明，作为筮数的释文，相关数字应写为一、五、六、七、八、九等等，但因筮数及筮算的结果数在性质上与数学计算有关，而且考虑到下文对揲算的研究主要出自数学的角度，故本书将筮数及揲算结果数都用阿拉伯数字写为1、5、6、7、8、9等等。可以肯定，筮算的记数和筮数的记录都采用十进制记数法。

出于对6数占法的重视，笔者对6个数一组的筮数的数字构成情况作了统计，详见表2—2。

表2—2　　6个数一组的筮数中所用数字的个数统计

<table>
<tr><th>时期</th><th>载体类型</th><th>1</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>奇数</th><th>偶数</th><th>说明</th></tr>
<tr><td rowspan="5">晚商</td><td>卜甲、卜骨</td><td>1</td><td>2</td><td>14</td><td>12</td><td>5</td><td>2</td><td>17</td><td>19</td><td rowspan="5">共有筮数24组应使用6×24＝144个数字，残损6个，共存138个数字。</td></tr>
<tr><td>青铜器</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>石器、陶器</td><td>17</td><td>3</td><td>42</td><td>22</td><td>12</td><td>0</td><td>42</td><td>54</td></tr>
<tr><td>小计</td><td>19</td><td>5</td><td>58</td><td>36</td><td>18</td><td>2</td><td>62</td><td>76</td></tr>
<tr><td>出现频率</td><td>0.138</td><td>0.036</td><td>0.420</td><td>0.261</td><td>0.130</td><td>0.015</td><td>0.449</td><td>0.551</td></tr>
<tr><td rowspan="5">西周</td><td>卜甲、卜骨</td><td>30</td><td>9</td><td>47</td><td>19</td><td>27</td><td>2</td><td>60</td><td>74</td><td rowspan="5">共有筮数54组，应使用6×54＝324个数字，残损5个，共存319个数字。</td></tr>
<tr><td>青铜器</td><td>12</td><td>3</td><td>28</td><td>11</td><td>5</td><td>0</td><td>26</td><td>33</td></tr>
<tr><td>石器、陶器</td><td>72</td><td>4</td><td>28</td><td>2</td><td>20</td><td>0</td><td>78</td><td>48</td></tr>
<tr><td>小计</td><td>114</td><td>16</td><td>103</td><td>32</td><td>52</td><td>2</td><td>164</td><td>155</td></tr>
<tr><td>出现频率</td><td>0.357</td><td>0.050</td><td>0.323</td><td>0.100</td><td>0.163</td><td>0.006</td><td>0.514</td><td>0.486</td></tr>
<tr><td colspan="2">合计</td><td>133</td><td>21</td><td>161</td><td>68</td><td>70</td><td>4</td><td>226</td><td>231</td><td>457</td></tr>
<tr><td colspan="2">出现频率</td><td>0.291</td><td>0.046</td><td>0.352</td><td>0.149</td><td>0.135</td><td>0.009</td><td>0.495</td><td>0.505</td><td></td></tr>
</table>

从表2—2中可以归纳出下述特点：

（1）筮数中没有2、3、4三种数字

对于筮数中没有2、3、4三数的现象。张政烺先生解释说：

> 我的看法是二、三、亖（四）、都是积画为之，写在一起不易分辨是几个字，代表哪几个数，所以不能使用，然而这三数并非不存在，而是筮者运用奇偶的观念当机立断，把二、四写为六，三写为一，所以一和六的数量就多起来了……这一点果然成立，则殷周易卦中一的内涵有三，六的内涵有二、四已经带有符号的性质，表明一种抽象的概念，可以看做阴阳爻的萌芽了。[5]

(2) 数字"一"的符号功能有增强趋势。

在表2-2中，筮数中的数字"一"在商代占19/138，为14%左右，到了西周则为114/319，占到36%左右，而5、7、9三数所占的百分比则有所下降。假如在商代的筮法中已出现了将数字"一"作为奇数符号使用的做法的话，这一特点似乎显示出数字"一"的符号功能存在着逐渐增强的趋势。筮算结果数彻底地符号化为卦象，由此可见端倪。

(3) 奇数和偶数的出现频率倾向于各占一半

如果引入奇偶的概念，从表2-2中立即可以看出，不论是分类统计还是综合统计，奇偶数的出现频率都明显地倾向于各占一半。这种现象是否纯属偶然，目前还难于作出判断。但是从中有两点提示：一是古代占筮家们使用的占法极有可能与筮算得数的奇偶性质有关；二是将筮得的2、3、4三数依奇偶归入1和6中，或者筮得5、7两数时也许曾有改记为1的做法（参看本书第4章4.5节），均应不违背以奇偶作占的相关规则。至于古代占筮家们为什么要将筮得之数转化为奇偶符号的主要原因，本书第7章7.2.1节中提出了一种推测。

(4) 涉及数字与传世揲算的得数有明显差异

目前已经发现的筮数虽然有大体一致的记录形式，但是它们在数字构成上的差异表明，很可能存在着几种不同的占筮算法。或者说，在将占筮结果以筮数的形式进行记录的时代并没有形成统一的筮算规则。例如李学勤先生根据数字出现的情况，将获得筮数的方法分为甲、乙两种，并认为筮数中"有没有'七'，是区别甲、乙两种揲蓍法的标志。"（语见李著《周易溯源》，巴蜀书社，2006年1月版，第231页）另一方面，就已知的同批或同版筮数的数字来看，还没有发现与传世揲算中可能出现的得数完全相容的例证，表明这些已知筮数的算得方法均有别于《周易》揲算。

传世揲算得到的结果数只有6、7、8、9四种可能。如果认为2、3、4三数已作了归并，所以与揲算结果数相比，虽然这些筮数在形式上只多出1、5两数，但从筮算结果数考虑，应包含1～9这九个数字。如果考虑出现得较多的1、5、6、7、8诸数，而不涉及2、3、4，也与传世揲算的结果数不符。要想从已有的这些筮数材料推测出当时所用的算法规则显然是很困难的。而且这些数符组是否全是实际占筮的记录，与实占记录有关的部分与传世的《周易》占法又有怎样的承续关系等等，都是有待研究的问题。如果认为这些数符组都是筮算结果的实际记录，笔者估计，获得这些筮数的筮算方法可能有多种，其中有些也许的确是早期揲算的结果。在本书第4章4.5节中，笔者按揲算模式对一些筮数的获得算法作了相应的估计。

2.2.3 战国竹简中的卦象

(1) 实占记录中的卦象

根据已发表的考古资料（图2-4），目前所见最早的六十四卦卦象的实占记录出自1994年新蔡葛陵楚墓出土的战国竹简[6]。该墓的墓主人卒于楚肃王四年，即公元前

377 年。竹简中的卜筮简录有两卦一组的卦象共 15 组 30 卦，其中有 12 组 24 卦为完整卦象。这些卦象的阳爻均为一横画，符号化的性质已毋庸置疑，若将它们视为数字“一”肯定是不妥当的。阴爻则画做两斜画，在 102 个阴爻中，有 92 个两斜画的上端相连，而上端分开作八字形或两斜画交叉的则各有 5 爻。有学者认为这些阴爻应视其形态分别释为数字 6、8 和 5，阳爻也应释为数字 1，因而它们都是筮数。李学勤先生指出，这是一种误读，并论证两斜画都是阴爻，一横画都是阳爻，所以它们应当是卦象，不是筮数。[7]在这些卦象的爻符中以占总数 5%左右的两斜画交叉画出的阴爻最为敏感。在筮数说中它是数字 5，由于是奇数，当有阳爻的地位。而在卦象说中它则是阴爻，这就使交叉画出的两斜画陷于难以判断阴阳属性的窘况。笔者倾向于认为将两斜画交叉画出的形式并非 5 字，而是一种特殊的阴爻符号的原因，除李先生提出的理由之外，还因为这些卦象极可能是用《周易》变卦占法画出（详见本书第 6 章 6.2 节），而揲算结果数中并无 5 这个数。至于“八”字画法，相对于上端相连的形式，如果不是因为笔误将两斜画写分开了的话，既可能也是一种特殊的阴爻符号，也可能是早期卦象中残留有数字“八”的表现。这些非标的或特殊的卦象很可能是《易》占记录方式由筮数向卦象的过渡阶段中出现的形态。当然，这种在少数情况下在卦象中使用某些特殊符号或以数字表爻符的记录方法遵循着怎样的规则，应当自有解释，不可能是古代占筮家的随意之作，只是我们今天已很难获得具体的了解。另一方面，从性质上看，在卦象中掺加进个别的特殊符号或者数字虽有今天已难于知道的原因，然而它们的存在并不能改变占筮记录形式已实现了符号化的事实。笔者倾向于赞同将这种由两斜画构成的符号均释为阴爻的做法。也就是说，在战国时期的卦象记录中，一般情况下凡一横画都是阳爻，凡两斜画都是阴爻。

与葛陵简类似的卦象画法还见于 1987 年荆门包山楚墓（墓主人卒于楚怀王十三年，即公元前 316 年）出土的战国竹简，其中的占筮简中录有两卦一组的实占卦象记录，共得 6 组 12 卦，每卦 6 爻。阳爻均为一横画。在 38 个阴爻中，两斜画的上端相连的有 31 个，上端分开的有 6 个，两斜画交叉的则有 1 个。[8]

1978 年江陵天星观楚墓出土一批竹简，入葬时间断为公元前 350 年左右，为战国中期。据张政烺先生《易辨》一文介绍的 5 组 10 卦 60 爻中，画为一横画的有 24 个，两斜画上端相连的有 33 个，两斜画上端分开的有 1 个，其余两个则是数字 7 和 9。如果视为筮数，它们分别是 1（24 个）、6（33 个）、7（1 个）、8（1 个）和 9（1 个）。张先生认为：

> 在这些卦例中，一、六出现次数最多，已经不是筮数的自然现象，而是作为奇偶符号……七、八、九这三个数字如果是筮用数字，至少当出现三十多次，却如此罕见，这是什么原因呢？我的看法，当时的卦爻以一、六为主体，而使用的筮数原是有七、八、九的，到写成卦画时，一般都变成一和六了，在这几处偶然出现，或是由于某种原因（尚不明白）而保留着的。[9]

笔者估计，这些实占卦象中的“七”、“九”两数也许是残留的筮数，它们应是阳爻，但仍写成数字，可能与当时所用的表示某种特殊含义的记录方法有关。这个现象似乎也是占筮记录方法在由筮数过渡为卦象的过程中遗留下来的痕迹。“八”字则是阴爻的特殊记法，也有可能同样是残留的筮数。如果仅据这些少量残留的数字就把整个卦象归结为筮数，也许并不妥当。

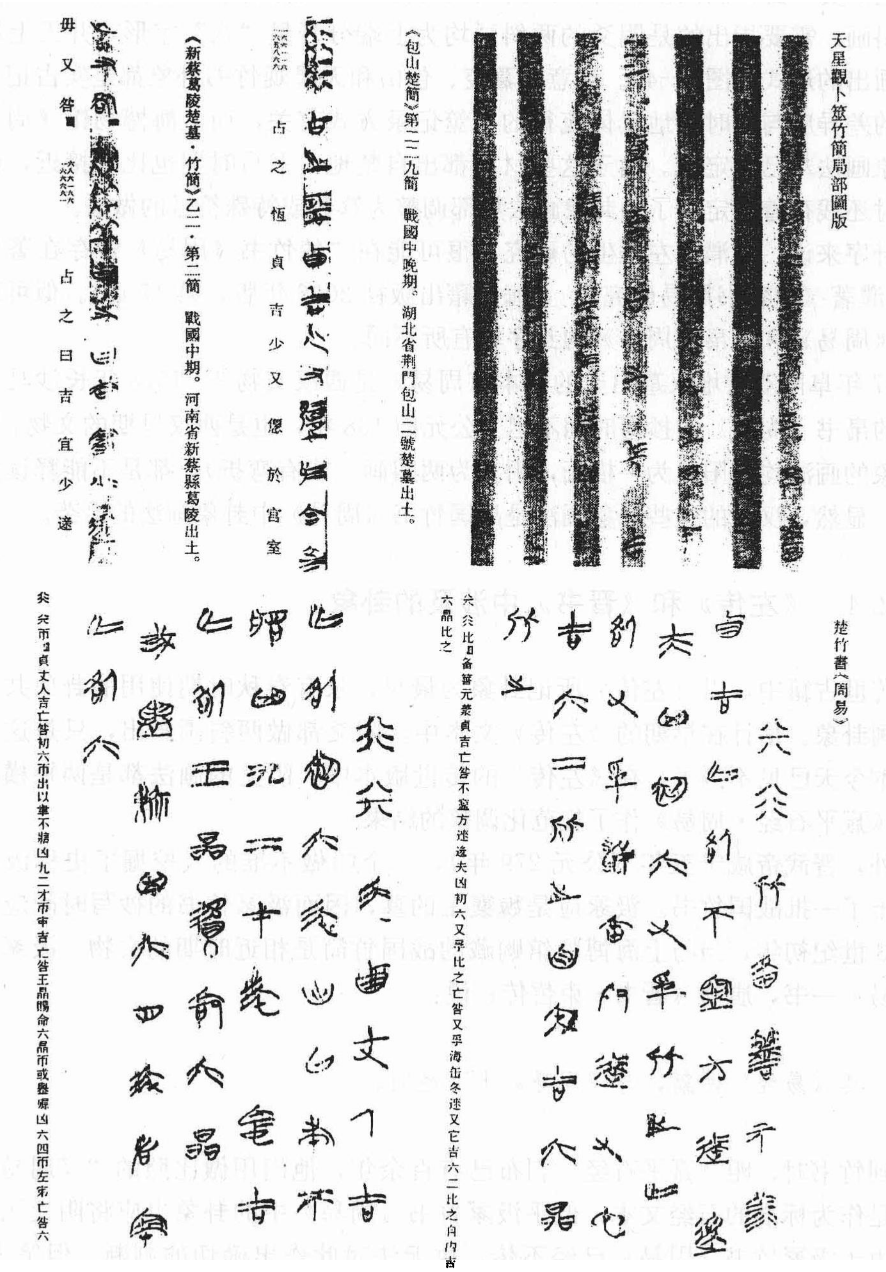


图 2—4　战国楚简中的卦象（包山和葛陵简中的卦象按筮数释出）

（引自濮茅左《楚竹书周易研究》）

(2) **楚竹书《周易》中的卦象**

1994年，上海博物馆从香港文物市场购回一批竹简，估计是1993年盗自荆门郭店的楚墓之物，入葬年代属战国中、晚期，即公元前350~前300年左右。这批竹简中有一部《周易》，是目前发现的书写年代最早的《周易》文本。[10]其中完整的卦象有25个，都是6爻一卦，画法上内卦和外卦间略为分开，爻符构形均为阳爻为一横画，阴爻为两斜画。需要指出的是阴爻的两斜画均为上端分开呈“八”字形，并无上端相连和交叉画出的形式（图2—4）。注意到葛陵、包山和天星观竹书卦象都是实占记录，爻符画法的差异应与当时各地具体流行的占筮记录方式有关，而上海博物馆《周易》简中的卦象画法却已经定型。由于这些材料都出自楚地，书写时期也比较接近，似乎表明实占时还残存着对定型了的卦象画法局部调整为筮数或特殊符号的做法。

就卦序来说，按濮茅左先生的研究，很可能在“楚竹书《周易》中存在著另一种卦序”（濮著《楚竹书周易研究》，上海古藉出版社2006年版，第47页）。似可理解为与传本《周易》和汉帛《周易》的卦序均有所不同。

1997年阜阳双古堆汉墓出土的简本《周易》是西汉文物。[11]1973年长沙马王堆汉墓出土的帛书《周易》的抄写时间不迟于公元前168年，也是西汉早期的文物。[12]这些简帛卦象的画法均为阳爻为一横画，阴爻为两斜画（或有弯折），都是不能释读为筮数的画法。显然，汉代的这些卦象画法是战国竹书《周易》中卦象画法的沿袭。

2.2.4　《左传》和《晋书》中涉及的卦象

在传世古籍中，以《左传》所记卦象为最早，录有春秋时期使用的卦象共38个，全是6画卦象。估计在早期的《左传》文本中，阴爻都做两斜画画出，只是这种较原始的版本今天已见不到了。在《左传》的传世版本中，阴爻的画法都是两短横画，可能是按《熹平石经·周易》作了规范化调整的结果。

此外，晋武帝咸宁五年（公元279年），一个叫做不准的人挖掘了史称汲冢的古墓，出土了一批战国竹书。汲冢应是魏襄王的墓，因而汲冢竹书的抄写时间应不晚于公元前3世纪初年，当与上海博物馆购藏的战国竹简是相近时期的文物。汲冢竹书中有《周易》一书，唐修《晋书·束皙传》说：

> 其《易经》两篇，与《周易》上下经同。

晋人见到竹书时，距《熹平石经》刊布已有百余年，他们用做比照的“《周易》上下经”应是作为标准的石经文本，似乎汲冢竹书《周易》中的卦象也应将阴爻画做两短横画。由于汲冢竹书《周易》已经不传，故无法对此作出确切的判断。但笔者估计，晋人比照的结果很难认为是一字一画全都相同，由于卦象中阴爻的斜、平两种画法并无性质上的不同，晋人在比照时对这种画法上的差异很可能就略而不述了。因而仅仅

依据晋人的说法，似难将传世卦象画法出现的时期上溯于战国晚期以前。

2.2.5　卦象形成过程的推测

如果暂不考虑伏羲“始作八卦”，以及周文王“盖益《易》之八卦为六十四卦”诸说，将上述材料综合起来，可以整理出卦象形成过程的大致线索：早期的占筮可能不作文字或符号的记录，所以筮数和卦象都是占筮术发展到一定阶段以后出现的事物。商代出现了筮数，这种以文字形式直接记录筮算结果数的方式也见用于西周，其间，筮数有局部符号化的趋势。在西周晚期和春秋时期的出土文物中，筮数与卦象都少有或没有发现，但依《左传》的记载，似可认为卦象的形成不迟于西周晚期。很可能卦象的出现是西周时期（笔者倾向于认为是在西周晚期）的巫史们调整改变了筮算得数记录方式的结果。这种改变有两个方面：一是完成了筮算得数在记录形式上的符号化转变。即完全按筮得结果数的奇偶属性分别记为阳爻或阴爻，不再采用记为筮数的形式。二是早先的巫史有将筮数刻记于甲骨或金石载体的做法，后来的巫史可能只用笔墨颜料将筮数或者是卦象记录于简帛，不再采用契刻和铸造的方式。从目前发现的战国楚简和西汉帛书中的卦象来看，阳爻已统一画为一横画，而阴爻的两斜画有交叉或顶端分开和相连，以及两斜画呈弯折状等数种画法。如果简单地从形式上观察，似乎阳爻是由筮数“一”转化形成，而阴爻则是由筮数“六”或“八”转化而成。尽管用卦象取代筮数的较为规范的做法极有可能发生于西周晚期或更早的时期，但是直到战国时期，在实占卦象的画法中有时还残留着以特殊符号或数字表爻符的现象。可以认为阳爻为一横画，阴爻为两斜画的卦象形态极有可能从西周一直沿用到西汉。将阴爻画做两短横画的画法出现于汉代，东汉时期已普遍流行这种画法。自东汉晚期刊刻《熹平石经》以后，石经上的画法便成了传世卦象的标准画法。如果忽略阴爻在早期画为两斜画和后来改为两短横画的非实质性的差异，可以说六十四卦和八卦的卦象定型时期都应该不迟于西周晚期。这个结论与本书将要讨论的揲算定型的时期也不迟于西周晚期是适配的。顺便指出，笔者认为卦象的形成与占筮算法的演进有着密切的关联。或者说，脱离卦象本身对数学知识的要求，以及脱离筮算能力的进步去谈论卦象的形成过程，似乎并不合适。

2.3　卦象的数学特点

用现代数学的理论，可以从不同的角度观察卦象的数学特点。通过这样的观察，似乎能帮助我们了解一些当时的数学思想和得到一些相关的启发。当然，这种观察都是现代人所做，原则上都是现代人的看法，除非还有其他证据，一般不能据以断定古代占筮家们也具有这样的数学认识。由于本书将卦象出现概率的计算另列章节讨论，

因而与卦象出现概率有关的内容可以参看本书第 5 章和第 6 章的相关节段，本节并不述及。

2.3.1 原始形态的组合数学思想

(1) 从卦象的构成可以观察到原始形态的组合数学思想

根据组合数学理论，卦象的构成遵循重复排列的数学规律。即，用两种元素（阳爻和阴爻），每次从中可重复地选取 n 个元素为一组，共有 2^n 组互不相同的排列。对于八卦，$n=3$，所以用阳爻和阴爻可以排列出 $2^3=8$ 种互不相同的 3 画卦象。如果取 $n=6$，则可以排列出 $2^6=64$ 种互不相同的 6 画卦象。显然，上述说法的意思是互不相同的 3 画卦象全部列出来也只有 8 种，而互不相同的 6 画卦象全部列出来也只有 64 种，再不会出现更多的种数。古人肯定并不具备组合数学的理论知识，当他们萌生出用阴阳二爻做 3 爻一组的排列的想法时，只能采用逐一枚举的方法将所有可能出现的情形画出，结果是发明了八卦。六十四卦则是在同一思路的支配下，仍然采用逐一枚举的方式找到的。由于这两类卦象的具体数量都很有限，一旦有了这样的思路，用枚举的办法画出它们是完全可能的。当然，他们也只能采用这种类型的方法来排出所有的卦象。可以肯定，古代占筮家们既有卦象构成方式上的基础性想法，又找到了可行的枚举方法将它们逐一排出，已是一种数学知识积累到了一定程度后才能取得的成果。用今天的术语来说，不妨称之为原始形态的组合数学思想及成功应用的实例。

(2) 原始形态的组合数学思想对后世占筮术的影响

应当指出，这种原始形态的组合数学思想对后人是有影响的，尤其是占筮家们受到的启发最为直接。例如，除春秋时期田忌赛马的组合对策之外，西汉时期出现的《易林》和《太玄》，以及北宋时期出现的《潜虚》，都是模仿《周易》的占筮方法，其卦象的构形都与原始形态的组合数学思想有直接的联系。下面顺带简介它们的卦象种数的计算：

①《易林》占筮法。

焦延寿（焦赣）是西汉昭帝（公元前 86～前 74 年在位）时期的易学家，他自创的《易林》占筮法属于改进的卦占类型。《易林》在《周易》六十四卦的基础上，每卦配置 64 种按变卦规则得到的之卦（变卦规则详见本书第 5 章，此处从略），因而共有 $64\times64=4096$ 种情形，焦氏对应地配置了 4096 条释占繇辞。如果将这样得到的情形视为 4096 种新卦象，它们就是用阴阳两种爻符，可重复地将 12 个爻符构成 1 个卦象时所得到的结果，此时 $n=12$，因而共有 $2^n=2^{12}=4096$ 种不同的 12 画卦象。当然，《易林》中并未画出这种 12 画的卦象，而是按 64 种 6 画卦象分组，每组再各配 64 种之卦的方式进行繇辞排列的。

②《太玄》占筮法。

扬雄是西汉末年的易学家，他创制的《太玄》占筮方法则另有一套卦象系统。《太玄》使用“——”、“– –”、“- - -” 3 种爻符，其卦象称为“首”，每首均由可重复取用

的4个爻符构成，即 $n=4$，因而一共有 $3^n=3^4=81$ 首。各首有自己的名称，例如符号画做“𝌞”的首就叫做《干》。

③《潜虚》占筮法。

司马光（? ~1086）是北宋时期的政治家，从他发明的《潜虚》占筮术来看，他还是一位占筮家。《潜虚》的卦象沿用传世筹算的纵式筹符𝍠、𝍡、𝍢、𝍣、𝍥、𝍦、𝍧、𝍨和可以用筹策摆出的记数符号×（5）和十（10）构成，不妨称之为数符卦象。这十个符号就是1~10共十个正整数，它们相加的和等于55，按司马氏的方法用这些数符组合而成的卦象正好是55个（释占时只使用了其中的52个）。这些卦象各有名称，例如𝍠𝍥和×𝍦分别叫做《昧》和《昭》，并且有一套排序的规则，所以这些卦象也具有编码索辞的功能。《潜虚》的筮算仍然采用点数筹策的方式，没有引入筹符记数的做法，涉及用策70和分2挂1揲10的揲算。定卦索辞时又有主客阴阳之分，以及10等7变之设，于模仿《周易》占筮术之外，具有不少自己的特色。《潜虚》共列繇辞52×7=364条（但书中已约定只使用其中的52×5=260条释占）。释占的依据还涉及书中排画的“气”、“体”、“性”、“名”四图，这些图形均由前述十个数符构成，从中可以观察到四种不同的平面组合构形方式。司马氏借取了《周易》占筮术的部分做法，将一些数学知识与他的神学和哲学认识组织在一起，发明出这套独特的占筮法，实在是花费了一番不小的心思。但是从实际应用情况来看，《潜虚》占筮术在宋代的流传就十分有限，到了后来大体上只具史料价值而失去了实用意义，因而对中国传统文化所产生的影响远不能与《周易》相比。

2.3.2 关于卦象列写技巧及画数和卦数计算的讨论

《易传·系辞上》记载了《周易》占筮术中求取爻符的揲扐算法，按照此法将求得的爻符从下向上依序画出，即可得到由若干个爻符构成的卦象。《易经》中列出的卦象证明，古代占筮家们已经知道，用这样的方式得到的由6个爻符构成的卦象共有64种不同的式样。而在《易传》中则介绍了由3个爻符构成的八卦。虽然《易传》的成书晚于《易经》，但不宜据以认为八卦比六十四卦晚出。另一方面，传统易学中有八卦为伏羲创制、六十四卦为文王所演的说法。尽管至今尚还无从证实这种发明顺序的真实性，却能够表明古代占筮家们已经观察到这两类卦象在构成上存在着一种简单与复杂的关系，根据这样的观察很自然地会产生出先有八卦后有六十四卦的认识。

在用《周易》占筮术求占时，占筮者只要按规则完成揲算操作，就一定能随机地从六十四卦中定出一个卦象，然后用于索辞和释占。不过，从全面了解《周易》占筮术的角度来看，占筮家不仅在占筮时应会使用揲算成卦法求取卦象，而且除了死记硬背之外，还需要掌握不重不漏地列写出全部8种3画卦和64种6画卦卦象的能力或技巧。不难判断，形成这种能力或技巧的重要基础是数学。笔者推测，在卦象发明定型的过程中，占筮家们用阴阳两种爻符枚举排列出所有可能出现的八卦和六十四卦的卦

象时，必然会探求与当时的数学知识和逻辑推理能力相适应的列写方法。古代占筮家们是怎样解决卦象列写问题的呢？此外，关于卦象画数和卦数的计算，他们又有怎样的认识？都是可以讨论的问题。

（1）相重列写法

在传世的易学文献中常有将一个 6 画卦拆为上下两个 3 画卦的做法。例如，在《易传·象》中就逐卦地用这种方式来表述六十四卦的卦象构成。反过来，占筮家们完全有可能发现，用两组八卦的卦象可以按序两两相重地列写出六十四卦的所有卦象。其实，这也是一种具有数学正确性的卦象列写方法，不妨称之为相重列写法。

《易传·系辞下》说：

> 八卦成列，象在其中矣。因而重之，爻在其中矣。

这里的“因而重之”就是利用相重列写法的意思。由于《易传·系辞》大致成书于战国时期，说明当时的占筮家们的确已经知道了这种列写六十四卦所有卦象的技巧。不过，笔者推测这种技巧很可能源自西周，并非东周时期的发明。

在长沙马王堆汉墓（公元前 168 年入葬）出土的帛书《周易》中，六十四卦的构成及排序有明确的规律，其上卦按《乾》《艮》《坎》《震》《坤》《兑》《离》《巽》的八卦顺序分成八组，然后每组的下卦都按《乾》《坤》《艮》《兑》《坎》《离》《震》《巽》的八卦顺序逐一与上卦相重而成（与上卦相同的下卦要先提出与上卦相重，其余各卦再依序相重）笔者推测，这种列写卦序的方式虽然见于西汉早期的出土文物中，但极有可能是战国甚至更早的时期，一部分占筮家直接地采用相重列写法编列卦象，并流传于后世的结果。

关于今本《周易》中六十四卦的构成和排序，历代学者均有研究，成果甚多，其中最早的记载见于《易传》中的《象》《说卦》《序卦》等传文，不过涉及的多是人们在自然界和社会生活中观察到的因果关系，属于“托象以明义”之类的易学认识。依据卦象的构成研究卦序的一种结论则见于唐代学者孔颖达所作的《周易正义》一书。孔疏云：“二二相耦，非覆即变。”指的就是今本《周易》的卦序列写规律。由于按照“覆”和“变”的概念，不难确认今本《周易》中卦象的排序与 28 对具有互“覆”关系的卦象有关，并辅之以“变”而不“覆”的 4 对卦象。一般认为，帛书卦序与今本卦序的存在，表明在先秦时期的《周易》占筮术中，曾使用过两种甚至数种卦序不同的《易经》文本。

由于在一些古代文献中，通常都能找到不少间接地与相重列写法有关的内容，例如《易传》中就有这类材料，笔者推测，今本《周易》并没有象帛书《周易》那样直接采用相重列写法进行卦象排序的原因，很可能与商瞿一系的传《易》者使用的《易经》文本与之不同有关。不过，采用传世文本的习惯性做法并没有妨碍古代占筮家们在研讨卦象及易学时，仍然比较广泛地使用相重列写法。

相重列写法在《周易》占筮术和传统易学中受到一定程度的重视是有原因的。

首先，这是一种易懂易做的可以确保不重不漏地列写出全部64种6画卦的方法。如果说八卦一共只有8种不同的卦象，在没有掌握列写技巧的情况下，用阴阳二爻将它们枚举列出来还比较容易做到不重不漏的话，那么，用这样的方式列写六十四卦就会麻烦得多。相重列写法用八卦的8种3画卦象两两相重组合排出六十四卦的做法，显然是一种非常适用的卦象列写技巧。这种技巧既有利于占筮家的记忆和释占，又有利于占筮家之间的交流，对《周易》占筮术的完善有明显的促进作用，必然会受到占筮家们的重视。

其次，用阴阳二爻列写卦象时，可能出现的卦象类型不止八卦和六十四卦两种。占筮家们还可以不太困难地发现1画的2卦、2画的4卦、4画的16卦、5画的32卦、7画的128卦，以及8画的256卦等类型的卦象。其中的相重关系可以通过具体列写而被占筮家们掌握，不应有特殊的困难。3画的8卦（八卦）和6画的64卦（六十四卦）之所以被选中并得以长期流传，似乎不仅与这两类卦象具有相重关系，可以找到列写卦象的技巧有关，而且与它们具有繁简合度宜于占筮应用的特点有关。占筮家们很有可能认为，与6画卦相比，相重得到的画数较少的卦象过于简单，而画数较多的卦象又过于繁琐，均不宜用于占筮。也许，在占筮家们和易学家们的评价标准中包含了相重成卦方面的因素。

第三，将两个八卦的3画卦象叠合为一个六十四卦的6画卦象时，所显示出的六十四卦卦象的相重结构有利于从易学的角度认识卦象。《易传》中除了《象》几乎是逐卦地用这种方式解说卦象之外，还有“引而伸之”，“八卦相荡”（《系辞上》），以及“八卦相错”（《说卦》）等说法，强调了八卦卦象在六十四卦卦象中表现出来的重叠交错、有序变换的特征。这种视角与立足于“唯变所适”（《易传·系辞下》）的易学认识是协调一致的。由此可见，相重列写法对易学的形成与发展具有一定的促进作用，在易学中已不仅仅只是一种卦象的列写技巧，必然会引起易学家们的重视。

应当指出，相重法并不涉及所用两组画数较少的卦象是怎么求取的问题，或者说，相重法只是按照已经确定的卦象构成规则，用画数较少的两组已知的卦象将相重后所有可能出现的卦象列写出来的技巧性方法。虽然相重法与卦象的构成有必然的关联，但它并不是占筮术中求取卦象的方法，而是解读分析和列写卦象的方法。事实上，占筮时所用的卦象都不是用相重法得到的。在《周易》占筮术中，卦象的求取及构成方法可以称为揲算成卦法，意为每个爻符都由揲扐算法求出，并按约定的方式排列成卦象。此外，本书将在第6章的6.3.2节讨论由《易林》变卦占法引伸得到的变卦成卦法，这是与揲算成卦法有所不同的另外一种卦象求取方法。在那里，我们将看到相重列写法在用变卦成卦法得出的卦象中也是适用的。

（2）卦象画数和卦数的计算

卦象的画数即一个卦象中所用爻符的个数。八卦的每一卦都由3个爻符构成，故为3画卦。将两个3画卦重叠为一个卦象时，得到的这个6画卦即是六十四卦中的某一

个卦象。《易传》云：

> 兼三才而两之，故六。（《系辞下》）
> 兼三才而两之，故《易》六画而成卦。（《说卦》）

即与卦象画数的计算有关。

从数学的角度来看，相重时适用于画数计算的是加法，即相重所成卦象的画数等于相重两卦画数相加的和。因而《易传》中的“两之”应释为两个3相加，即3+3=6，不能由于3×2=6而将“两之”说成使用乘法的“两倍之”。事实上，用相重的办法列写6画卦时，并非只有用两个3画卦相重一种。另外两种是用1画卦与5画卦相重，以及用2画卦与4画卦相重，都可以得到6画卦，其画数计算的“两之”就是1+5=6和2+4=6，用的也都是加法。不过，在传统易学中一般都不涉及这两种相重的方式。

卦象的卦数是指在确定了爻符种数和卦象画数，以及在可以重复取用爻符的条件下，所有可能出现的卦形的数量。八卦的卦数为8，六十四卦的卦数为64，便是大家熟知的例子。《周礼・大卜》说：在《连山》、《归藏》和《周易》中，“其经卦皆八，其别皆六十有四。”即是用卦数来描述这三种《易》占所用卦象的特征。认为在《周易》占筮术中可以观察到原始形态的组合数学思想，正是根据古人所列的八卦和六十四卦具有不重不漏的卦象种数而得出的判断。

从数学的角度来看，相重成卦时适用于卦数计算的是乘法，或者说相重所成卦象的卦数等于相重两卦卦数的乘积。《易传・系辞下》说：“八卦成列……因而重之。”就卦数而言，八卦条件下的“重之”具有用数8自乘的含义，即8×8=64，所得即是六十四卦的卦数。不过，六十四卦并不局限于用两组八卦相重列出。例如，用1画的2卦与5画的32卦相重，以及用2画的4卦与4画的16卦相重，所得6画卦的卦数分别是2×32=64和4×16=64，结果都是相同的。可见，卦数计算也表明用相重列写法排出六十四卦卦象的做法有多种，传统易学中用两组八卦相重只是其中之一。

（3）用相重法列写卦象的递推形式

如果不是从易学或宇宙生成论的角度去理解，而是从占筮术的角度来观察，《易传》中关于卦象列写的描述，当数《系辞上》的下述记载最为精彩：

> 《易》有大极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。

其中的“生”可视为一种特殊的相重，强调的是基于1画卦的递推相重，就卦象列写而言，可称之为递推相重列写法。这段话表明，古代占筮家们已经发现，从1画卦衍生出2画卦及3画卦时，相应的卦数计算均以1画卦的卦数2为倍率。也就是说，从1画卦的2种卦象（“两仪”）开始，可逐一地重以1画卦列写出2画卦的4种卦象（“四象”）以及3画卦的8种卦象（“八卦”）。这种具有递推性质的相重可以保证在排列推

成的卦象时，不会发生卦形的重复或遗漏，因而是一种最为基本的卦象列写技巧。按此思路做下去，可以生成六十四卦，其结果与用两组八卦相重所得完全相同。在列写六十四卦的递推相重过程中，画数和卦数的计算如下：

画数：1+1=2， 1+2=3， 1+3=4， 1+4=5， 1+5=6。

卦数：2×2=4， 2×4=8， 2×8=16，2×16=32， 2×32=64。

当然，继续递推下去，还可以得出更多画数的卦象所对应的卦数，并且可以将这些卦象不重不漏地列写出来。具体列写时，只要在已有卦象上分别加上1画卦的1个阳爻和1个阴爻，就可以“生”出多1画的新卦象。例如2画卦共有4种卦象，分别加上1个阳爻后可得4个3画卦。改为加上1个阴爻后又可得4个不同的3画卦，一共有8种新的卦象出现，它们就是八卦的所有可能出现的卦象。

由于递推相重是一种有序且简单易行的卦象列写方法，因而占筮家及《易传》的作者应当知道用这种方法也可以列写出六十四卦，但是在传文中却只用递推相重的方式阐述八卦的列写，而另外用八卦相重的方式列写六十四卦的卦象，其原因很可能主要是为了满足占筮应用和易学解读的需求，这在《易传·象》中用八卦相重的方式逐卦地解析六十四卦卦象的做法中已有充分体现，并不涉及数学方面的考虑。此外，《易传》中关于用揲算求爻符，用爻符建卦象，以及卦象列写技巧方面的记载，普遍存在着明显的易学化的特点，强调的不是相关的数学规律，而是“观察于阴阳而立卦”（《易传·说卦》）之类的易学理念。《易传》的作者很有可能认为，在传文中用不同的方法描述八卦和六十四卦的构建及列写，也体现了一种变化，可以取得更好的易学宣讲效果。

北宋学者朱熹和蔡元定合撰有《易学启蒙》一书，在“原卦画第二”章述及用递推相重和八卦相重两种列写六十四卦的方法，并递推至12画卦的列写：

> 十一画之上又各生一奇一偶，则为十二画者，四千九十六矣，此焦赣《易林》变卦之数，盖亦六十四乘六十四也。

他们还进一步地递推出24画卦的列写，算得其卦数为16777216，而且指出：“以四千九十六自相乘，其数亦与此合。”当然，朱、蔡都是从易学的角度认识这些计算的，他们说：

> 引而伸之，盖未知其所终极也。虽未见其用处，然亦足以见易道之无穷矣。

从数学的角度观察，用递推的方式分析八卦卦象的生成，用相重的方式分析六十四卦卦象的构成，以及列写出所有可能出现的八卦和六十四卦的卦形，并且用“两之”描述画数的加法计算，用“生”和“重之”描述卦数的乘法计算，都是符合数学规律

的做法，体现出古代占筮家们所具有的独特的数学智慧。在先秦数学史的研究中，涉及显现于卦象设计的原始形态的组合数学思想时，相重列写法和递推相重列写法应是值得一提的内容。下面对这两种古老的卦象列写技巧作一些数学解读。

（4）对相重列写法和递推相重列写法的数学解读

根据组合数学理论，在可以重复取用爻符的情况下，由 J 种爻符构成的 n 画卦的卦数 Sn 的计算式为

$$S_n=J^n$$

如果取 $n=n_1+n_2$，可得

$$S_n=J^n=J^{n_1+n_2}=J^{n_1}\times J^{n_2}$$

表明任何 J^{n_1} 个 n_1 画卦都可以与 J^{n_2} 个 n_2 画卦相重，并且列写出全部 J^n 个 n 画卦的卦象。《周易》卦象属于 $J=2$ 的情形，而《太玄》卦象则是 $J=3$ 的情形。

对于《周易》卦象，$n=n_1+n_2$ 描述了画数的计算，而 $S_n=2^{n_1}\times 2^{n_2}$ 描述了卦数的计算。这就是采用相重列写法时，关于画数的计算用加法，而进行卦数计算时用乘法的数学依据。这样，在用两组八卦相重时，$n_1=n_2=3$，故 $n=n_1+n_2=3+3=6$，而 $S_6=2^3\times 2^3=8\times 8=64$。

如果取 $n_1=1$，$n_2=n-1$，可得

$$S_n=J^n=J^{1+(n-1)}=J\times J^{n-1}$$

表明 J^n 个 n 画卦的卦象可以通过递推的方式逐一地列写出来。其中画数计算的逐一相加关系是显然的，可不必写出，而卦数计算的递推关系则可表为

$$S_n=J\times S_{n-1}\quad 边界条件：S_0=1。$$

《周易》卦象的 $J=2$，故《易》卦卦数计算的递推关系为

$$S_n=2\times S_{n-1}\quad 边界条件：S_0=1。$$

这就是递推相重列写法的数学依据。

应当指出，0 画卦的卦象是不存在的，其卦数 $S_0=1$ 可理解为一种特殊的卦象状态。对于 J 的各种取值（J 的取值范围是 2、3、4……）$S_0=1$ 都可视为一种非具象状态的数量描述。这样，“《易》有大极”中的“大极”也可视为 0 画卦，是一种没有具体卦形的卦象状态。数学上，这种状态的卦数被定义为 1，而易学中则有“元始有象一也”（《汉书·律历志第一上》）的说法。从数学理解和哲学观念来看，似可认为今人的认识与古人的说法不谋而合。

（5）相重列写法和递推相重列写法是西周占筮家们的发明

从形态上观察，笔者推测，与卦象的构成和列写相关的相重法思路，在筮数阶段 3 数占法逐渐融入 6 数占法的过程中已经露出了苗头。或者说，在商周时期流行的 3 数占法与 6 数占法之间很可能存在着某种已经失传了的相互关系。很可能，占筮术中的这种传统性的或习惯性的做法，对卦象的构成取为 3 画和 6 画会有一定的影响。在八卦和六十四卦的形成时期，通过经验的总结，占筮家们应当对用八卦重为六十四卦，以及将六十四卦拆为八卦的互逆关系有所了解，并在掌握卦象列写技巧的过程中促成

了卦象设计的定型。也就是说，如果没有总结出具有数学正确性的卦象构成规则和列写方法，将谈不上卦象设计的定型。这样，似乎可以认为相重列写法和递推相重列写法的出现时期应当与《易》占卦象，即八卦和六十四卦定型的时期基本一致，均不迟于西周晚期，因而极有可能是西周占筮家们的发明。

另一方面，注意到《易传》中有关卦象列写技巧方面的记载存在着明显的易学化特点。例如，相重列写法是在阐述卦象构成的“相错”、“相荡”、“爻在其中”等易学意义时才体现出来的。而递推相重列写法则用“两仪”、“四象”来描述卦数为 2 和 4 的卦象，并不正面介绍它们与八卦之间在卦数上具有以 2 为倍率的数学关系。由此可以认为传文的作者是基于前人传续下来的方法，在述及卦象的构成和列写时，从易学宣讲的角度进行了再加工。显然，不能因为许多学者都认为《易传》的成书时期晚于西周，就认为占筮家们关于卦象列写方法的发明是西周以后的事情。

(6) 西周时期已存在产生乘方概念的条件

如果传世的《周髀算经》中“矩出于九九八十一”确有可能是史称商高的晚商数学家所说，表明九九乘法口诀至迟出现于殷商时期并传续于西周，因而西周占筮家们应当已经掌握了与之相应的乘法运算技能，并在相重列写法的卦数计算中有所应用。在九九乘法口诀中，从二二得四、三三得九，依次数到九九八十一，共有 8 组重复相乘的情形。注意到“两仪生四象，四象生八卦。”和“八卦成列……因而重之……”这类说法中，与卦数计算有关的数学关系可以表示为 $2\times2\times2=8$ 和 $8\times8=64$，显示出除了两个相同的数重复相乘之外，还出现了三个相同的数的重复相乘。在现代数学中，这种重复相乘用指数来表示就是 $2^3=8$ 和 $8^2=64$。一般认为，乘方概念的形成源于重复相乘运算，这就显示出西周时期即使还没有建立乘方的概念，也在殷商时期出现的相同两数相乘的基础上，发展出将一个数重复相乘 3 次的做法，从而进一步地为后世提供了产生乘方概念的条件。

在中国的其他古代文献中，还可以找到一些与重复相乘的计算有关的记载，从中或许可以观察到先秦时期的数学家们以自己的方式接触到的尚不规范的乘方计算。

①与平方计算有关的面积描述和开平方术。与平方有关的比较特殊的，或者说还显得原始的做法见于先秦文献及西周金文中对地块大小的描述。例如《孟子·万章》说：

> 大国地方百里……次国地方七十里……小国地方五十里。

其中的“方”就是用正方形的边长“百里”、“七十里”和“五十里”来描述领地的大小。从西周召圜器铭文中的“毕土方五十里”来看，这种描述地块大小的方式至少可以溯源于西周。而《墨子·非命上》的“绝长继短，方地百里。”和《孟子·滕文公上》的“绝长补短，将五十里也。”则是用割补的方式，将形状并不规则的地块转换成正方形后，用其边长“百里”和“五十里”来描述土地的数量。在这些记载中，虽然

并没有直接地建立面积的概念，也没有计算以平方里为单位的面积数量，但是可以认为，在西周甚至是殷商时期已经出现了描述土地数量的需求，人们已经找到了具体的解决办法，而且这种独特的地块大小的定量描述方式还广泛地流行于春秋战国时期。

一般认为开（平）方术出现于春秋战国时期，由于人们习惯于用正方形边长的长短来描述地块的大小，因而开（平）方术的用途之一应当与计算正方形的边长有关。考虑开（平）方术的逆运算，也许春秋战国时期的数学家们已经在将一个数自乘的基础上，产生出某种与2次方计算有关的想法。

②与立方计算有关的开立术。根据《九章算术·商功》的记载，从容器制作及仓库建筑等生产生活的需求来看，大概在春秋战国时期出现了进行体积计算的动因，从而促使数学家们有可能接触到一些与体积计算有关的概念。事实上，除了开（平）方术外，《九章算术·少广》中还记有开立方术，可据此推测在秦以前已经有可能产生出与正方体的体积计算相关的立方概念。不过，在先秦时期的传世文献中尚还没有发现具体计算的例证。就与3次方计算有关的文献资料来看，言之有据的还仅仅只有《易传·系辞上》间接给出的$2\times2\times2=8$一例。所谓“间接”，是指在这一将数2自乘3次的计算中，事实上并没有指数的含义，所以不能直接地说成是2的3次方，也不能写成$2^3=8$的形式。但是不难看出，数学家们很可能已经掌握了将某数自乘3次与通过开立方得出该数的对应关系。

③“四开”已具有“指数的初步概念”。目前所知，与4次方计算有关的最早记载，见于《管子》一书，其中的“地员”篇说：

> 先主一而三之，四开以合为九九。

这里涉及到的应该是形成于秦汉以前的数学知识。其中的“一而三之”一般释为1的3倍，即1乘以3。而“四开”通常被解释为将某数重复相乘4次，即4次方。所以，这句话的意思是$1\times3=3$和$3^4=9\times9=81$。在这里，作为对$3\times3\times3\times3=81$的概括性描述，“四开”显示出4次方的意义。按李俨先生的意见，“四开”已具有“指数的初步概念”（参看李著《中国古代数学史料》，中国科学图书仪器公司1954年版，第6页。）与《易传·系辞上》给出的$2\times2\times2=8$的卦数计算关系只做易学描述，而未作诸如“三开”之类的数学概念的概括相比，“四开”有明显的进步。尽管如此，至少可以认为西周时期包括占筮术在内的实际应用中存在的重复相乘运算，为后人乘方概念的形成提供了必要的条件。

2.3.3 卦象与二进制

（1）莱布尼茨二进制记数法的发明是中西文化交流的成果

莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716）是著名的德国数学家，二进制算术是他

的一项重要发明。由于在电子计算机的研制中，与二进制相关的数学理论有着重要的应用，所以现代数学中对二进制数学理论的研究受到了普遍的重视。过去学术界一直认为莱布尼茨是在发明了二进制算术以后，才见到传教士们从中国带到欧洲的伏羲八卦和六十四卦图像的，尽管莱布尼茨认为他见到的卦象体系与二进制记数体系相似，但在许多数学史著作中都认为二进制算术的发明并不是受卦象启发的成果。胡阳和李长铎先生在《莱布尼茨二进制与伏羲八卦图考》一书中指出，经他们的考证，1658年意大利传教士卫匡国写成《中国上古史》一书，将伏羲八卦和六十四卦介绍到了欧洲，莱布尼茨在发明二进制之前就见到了伏羲八卦和六十四卦，并受卦象构成规律的启发，于1679年发表了关于二进制的文章，后来又于1703年发表了关于二进制算术的研究论文。据此，他们认为：

> 莱布尼茨发明的二进制是源于伏羲八卦图。[13]

按照胡、李二先生的考证，这段史实表明，二进制记数方法的发明是1658～1679年间缘于中西文化的交流，人们在数学上取得具体成果的一个例证。

（2）卦象本身并不是二进制记数法

关于卦象是不是二进制记数方法的问题，就笔者所知，有两种不同的看法。一种认为："伏羲八卦图本身就是二进制。"[14]另一种认为："八卦或六十四卦，与二进制暗合，但它们本身不是二进制。"[15]要解决这个问题，关键在于如何定义"二进制"。或者说，这是问：凡是由可重复取用的两种不同元素构成、且按一定顺序做出的排列都是二进制记数方法吗？

数学上的进位制是指用一定数量的基本数字序列按位置值制构造的一种记数系统。在多种记数系统中，人们日常所用的进位制以十进制最为普遍，这是一种使用0～9十个基本的数字序列，逢10进位的记数系统。在进位制中，前面所说的n值相当于数码的位数，例如当$n=3$时，在十进制中可构成$10^n=10^3=1000$个数码，它们表示了最高位数为3位数时，从0～999这1000个按位置制排序的整数。在二进制中，所用的基本数字是0和1，当然也可以用其他符号或状态，比如阴阳爻符或电路的开和关，但必须将这些符号或状态视为数，并建立逢2进位的规则。当$n=3$时，就有$2^n=2^3=8$个数码，它们的最高位数也是3位，但只表示十进制中的0～7这8个整数。在二进制中，所用的两种基本元素不管写成什么符号，甚至变成电路的开启和关闭两种状态，它们都被视为数学意义上的数，按位置值制排列的符号码或状态码也都是数码，因而是一套记数的序列，其用途是记数。

在卦象中，所用的两种基本元素是阴爻和阳爻，爻符由揲算结果数转化而得。揲算是一种十进制下的数算方法，所得结果数有6、7、8、9四种可能。阳爻由其中的奇数7、9转化而成，阴爻则由偶数6、8转化得到，因而从来源上看，爻符虽与数有关，但作为符号，其涵义是数的奇偶特性，而不再是具体的数。另一方面，古代占筮家们

发明出这一套爻符卦象系统，其目的是想通过它们沟通人神，用来占测人事的吉凶，并非用来记数。在实用中，爻符卦象甚至连奇偶涵义都被淡化了，而被赋予了阴阳、天地、刚柔、强弱等等象征性的意义，惟独没有发现将它们重又转化为数或数码的做法。因而卦象系统并不具备记数的功能，更谈不上从中发展出二进制算术。

如果视爻符卦象为数符，还需要排序得当，使之具有逢 2 进位的形式才能用于记数。正好北宋占筮家邵雍所说的先天图，也就是伏羲八卦和六十四卦的排序就与之相符，因而具有将它们视为 8 个或 64 个数的二进制记数序列的条件。莱布尼茨所受启发即与此有关。而按文王卦序，即今本《周易》的卦序，就排不出可以用于记数的序列。由于古代占筮家们并没有将卦象系统用于记数，在卦象的排序上并无严格的记数要求，历史上就出现过多种不同的形式，先天卦象图只是其中的一种，而且邵雍及使用先天图的占筮家们都没有将伏羲卦序视为记数序列，所以直接认为伏羲八卦本身就是二进制并不合适。可见，不能认为凡是由可重复取用的两种不同元素构成的，而且满足进位要求的排序都是二进制记数法。当然，反过来，说二进制是一种由可重复取用的两种不同元素构成的排序，则是可以的。

看来，卦象是中国古代占筮家们的发明，但不能认为卦象本身就是二进制记数方法，莱布尼茨受其启发，于占筮之外发明了性质和用途都不相同的二进制记数方法及二进制算术，这件事证明了不同民族或国家之间保持文化交流具有促进思想进步和科技发展的重要作用。当然，各个时代都有自己的特征，莱布尼茨从《周易》中观察到的东西，除了卦象构成中所显示出的具有可用于记数的功能之外，也许还有中国古人对天地神祇的崇拜。正如拉普拉斯（P. S. Laplace，1749—1827，法国数学家）所说：

> 莱布尼茨在他的二进位算术中看到了宇宙创始的原象。他想象 1 表示上帝，而 0 表示虚无，上帝从虚无中创造出所有实物，恰如在他的数学系统中用 1 和 0 表示了所有的数。”[注3]

2.3.4 《周易》卦象在三维空间中一种典型的点阵形式

既然卦象是一种有着严格构成规律，又可赋予不同涵义的符号系统，受其启发，就可能得到各种不同的结果。例如，除了在平面上对卦象进行排序之外，还可以将卦象排成各式各样的空间点阵的形式，在这方面，学者们已有不少成果，其中比较典型的是一种利用直角坐标系将《周易》卦象在三维空间中排出的点阵形式。

（1）三维空间中的三种基本的卦象点阵

令长度为 a 的线段的一个端点为阳爻，长度为 b 的线段的一个端点为阴爻，利用直角坐标系，可建立图 2—5 中画出的三种最基本的《周易》卦象点阵：

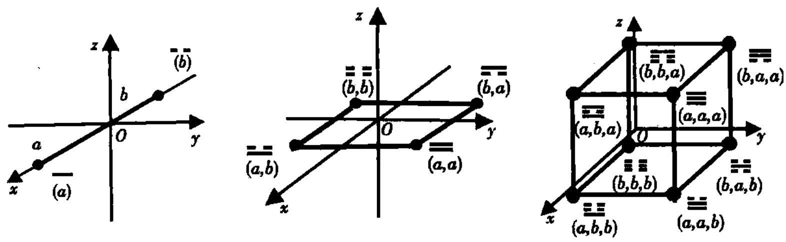


图 2−5　在 $O-xyz$ 坐标系中用线段 a 和 b 定义的三种基本的《周易》卦象点阵

(A) 1 画卦的点阵；(B) 2 画卦的点阵；(C) 3 画卦的点阵

在这三种基本点阵中，各点的记号与坐标相符，但并无坐标的性质，引入坐标系完全是为了便于表达和理解。也就是说，卦象的画数并不表示空间的维数。其中，由 8 个点构成的 3 画卦的点阵对应于八卦，它就是在三维空间中排画的八卦点阵的一种形式。

（2）三维空间中多画卦的卦象点阵

以八卦点阵为基础，在 8 个点处按图 2−6 所示的形式分别平移叠加 1 画卦的点阵，可得《周易》4 画卦在三维空间中排出的点阵的一种形式，这些点共有 16 个，代表了 16 个 4 画卦象。图 2−6（A）中加圈的点表示两点重合，在具体排画卦象时，可以将它们沿轴向适当拉开距离画出［见图 2−6（B)］。后面还会遇到不少重合点，均可在拉开距离后将卦象画出。

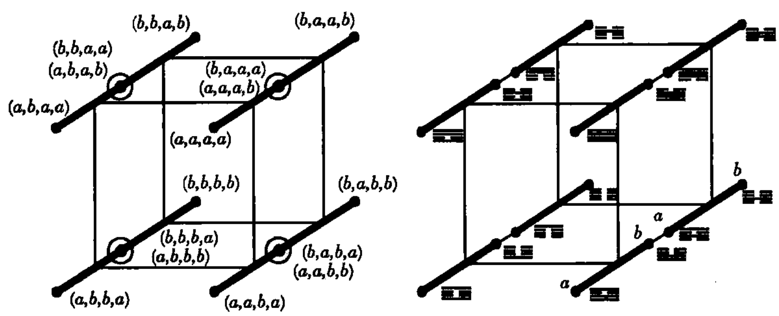


图 2−6　《周易》4 画卦在三维空间中的点阵

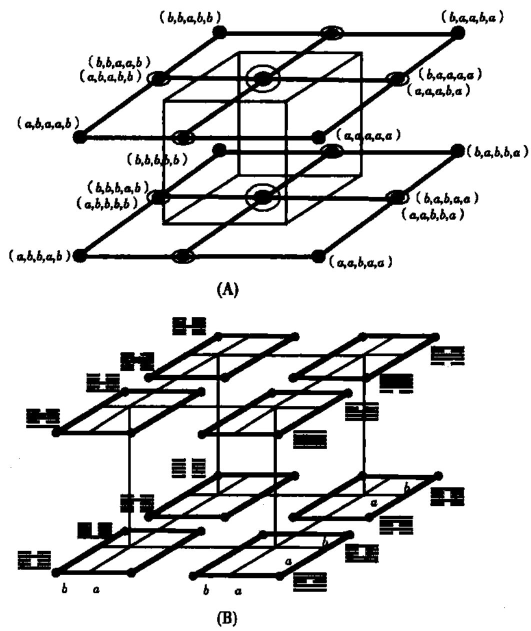
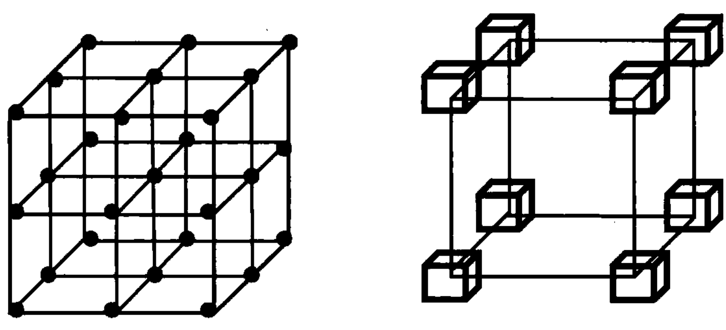


图 2—7　《周易》五画卦在三维空间中的点阵

以八卦点阵为基础，在 8 个点处按图示情形平移叠加 2 画卦的点阵，可得《周易》5 画卦在三维空间中的点阵的一种形式，这些点共有 32 个，代表了 32 个 5 画卦象（图 2—7）。图 2—7（A）中加圈的点是两点重合，加双圈的点是 4 点重合。图 2—7（B）是拉开距离后的情形，点阵记号和卦象符号各有 32 个，图中画出了 16 个。

以八卦点阵为基础，在 8 个点处分别平移叠加 3 画卦的点阵，可得《周易》6 画卦在三维空间中的点阵的一种形式，所得 64 个点代表 64 个 6 画卦象（图 2—8）。注意图 2—8（A）中有许多重合的点，凡是阳爻和阴爻的数量相同的卦象都重合于某一个点处。拉开距离后，可表示为图 2—8（B）。图中 64 个点的记号和与之相对应的卦象均略去未标。



（A）　　　　　　　　（B）

图 2—8　《周易》6 画卦在三维空间中的点阵

（A）6 画卦（六十四卦）在三维空间中的点阵

（B）拉开距离后的 6 画卦在三维空间中的点阵

显然，以六十四卦的点阵为基础，在 64 个点处按上述规则分别平移叠加 1 画点阵、2 画点阵和 3 画点阵，就能构造出 7 画卦、8 画卦和 9 画卦的对应点阵，它们代表的卦象个数分别为 128 个、256 个和 512 个。继续做下去，《易林》中隐含的 4096 个 12 画卦象也可以在三维空间中排出相应的点阵。至此，已可明显地看出：卦象的画数在性质上不是表征空间特性的维数；表示点阵中各点的记号，也都不一定标识为坐标。或者说，在重合点上，所重各点的记号可以用坐标标识，而拉开距离后，便不再具有坐标的意义。所以，图 2-8 (B) 并非“六维空间的六十四个点在三维空间的投影就是八个八重点，即每个点代表六维空间的八个点。”[16]

2.3.5　《太玄》卦象在三维空间中的点阵形式

《太玄》的卦象称为“首”，但为方便起见，这里仍然称之为卦象。《太玄》的卦象由 3 种爻符构成，每卦 4 爻，因而一共有 $3^4=81$ 种互不相同的 4 画卦象（参看本书第 6 章的 6.4.1 节）。只要建立合适的规则，便可以找到将它们表为立体点阵的具体形式。例如，用长度为 a、b、c 的 3 根线段各取一个端点表示 1 种爻符，便可定义出 3 种不同的爻符。任取一个直角坐标系，即可得到《太玄》1 画卦的点阵。如图2－9 所示：

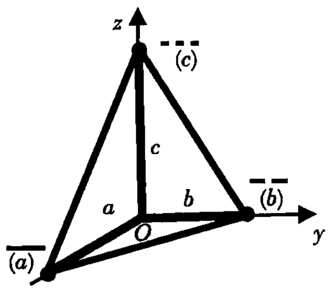


图 2－9　三维空间中《太玄》1 画卦的点阵

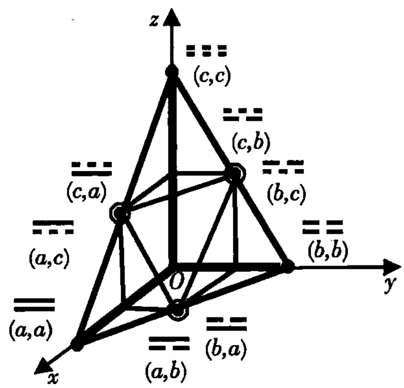


图 2－10　三维空间中《太玄》2 画卦的点阵

将这个最基本的点阵依次叠加到其本身的(a)、(b)、(c) 三个点处，叠加的规则是平移 1 画卦的点阵的坐标系，将原点置于原有的点处。而记录的规则是每叠加一轮，就增加一个相应的线段记号。第一轮叠加得到的《太玄》2 画卦的点阵如图 2－10，加圈的点为两个点的重合点，因而一共有 $3^2=9$ 个点，它们代表了 9 个 2 画卦象。在《太玄》卦象中，爻符顺序是从上向下排，恰与《周易》卦象中爻符的排序方向相反。

第三轮叠加可得《太玄》3 画卦的点阵如图 2－11，加单圈的是 3 点重合，加双圈的是 6 点重合，共有 $3^3=27$ 点，代表了 27 个 3 画卦象。图中只标出了 3 个单点的记号和卦象。

将 1 画卦的点阵再叠加到上述 27 个点上，可得《太玄》4 画卦象的点阵，共有 $3^4=81$ 点，代表了 81 种卦象。这就是《太玄》卦象的一种立体排序形式(图 2－12，图中只标出了

三个单点的记号、卦象和卦名)。其中:D、E、F、G、H、I 六个点为 4 点重合;J、K、L 三个点为 6 点重合;M、N、P 三个点为 12 点重合。这 81 个点都落在由 A、B、C 三点所决定的倾斜平面上。显然,继续做下去,可以得到各种画数的《太玄》卦象点阵。其中重合点处所重点数的卦象意义,是同类爻符的个数确定时,这类卦象的个数。而这类卦象中各卦的不同则在于爻符位置的轮换。

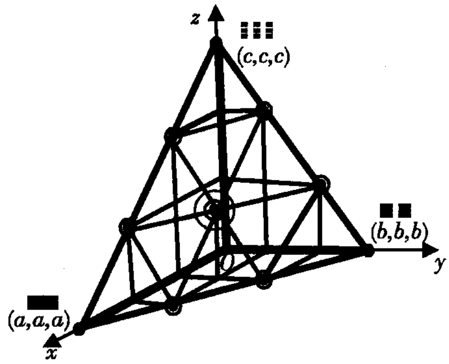


图 2－11　三维空间中《太玄》3 画卦的点阵

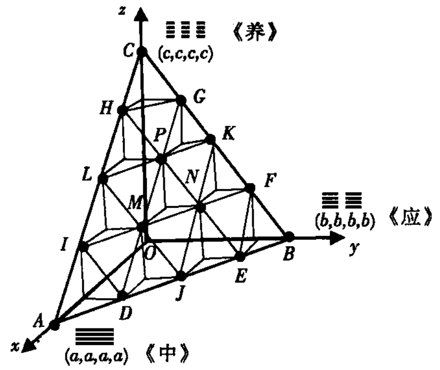


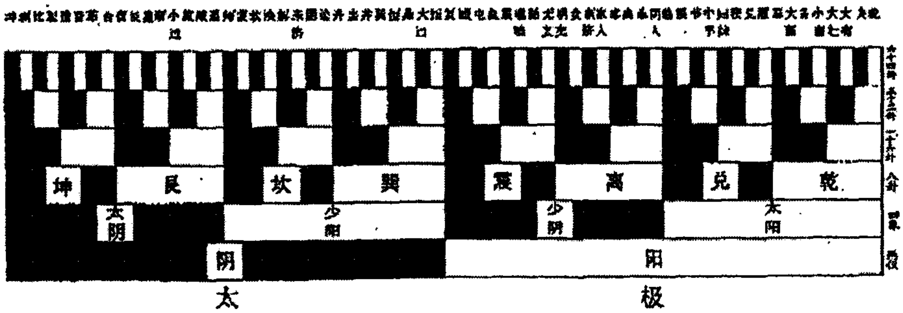
图 2－12　《太玄》4 画卦在三维空间中的点阵

2.3.6　《周易》卦象与自然科学

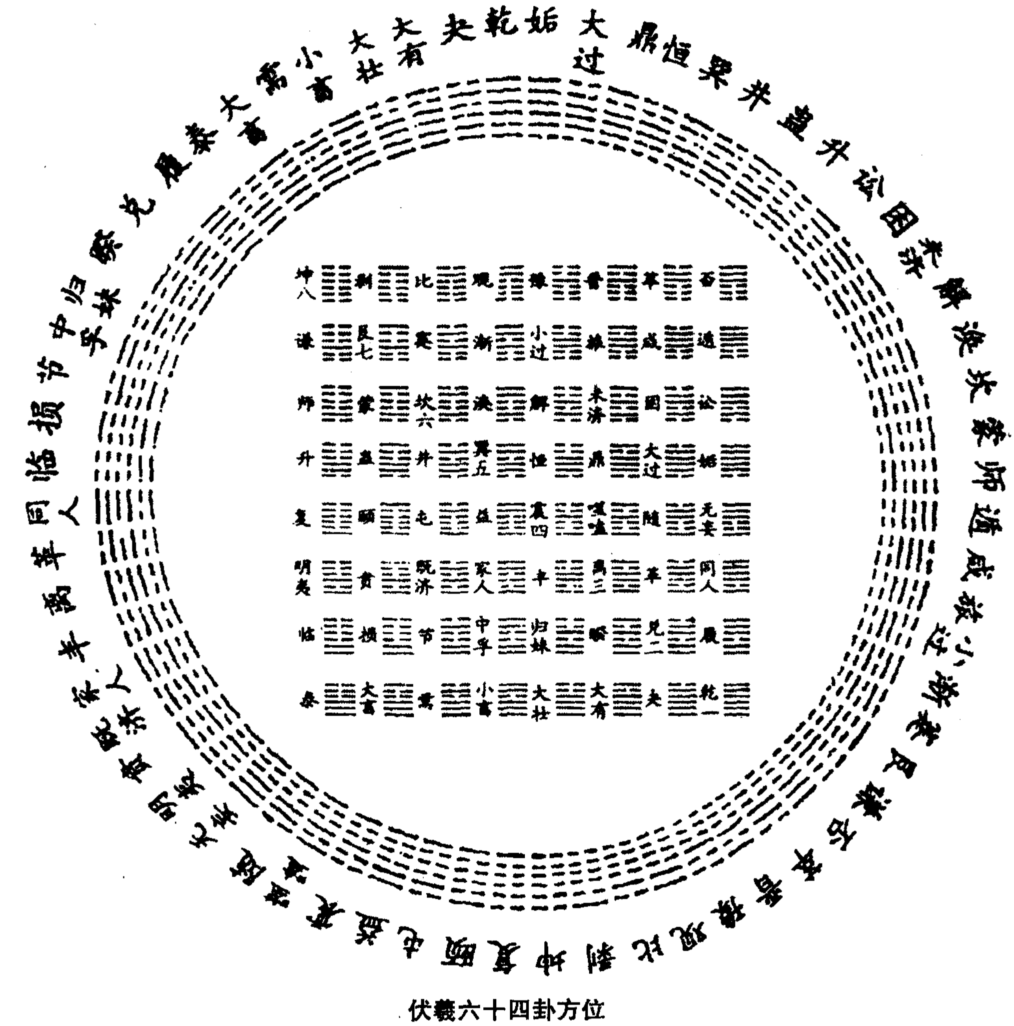
将八卦或六十四卦做平面或立体的排序，可能的排法是很多的。传统易学中使用的卦象排序均属于平面类型。古代占筮家们发现了“《易》有大（音 tài）极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦”（《易传·系辞上》），直至生成为六十四卦的分枝排序规律，列出了八卦和六十四卦的线状序列以及方图或圆图。尤其是邵雍的伏羲先天图，近现代的学者们发现，卦象的这种排序正与二进制数序的排法相合（图 2－13）。对于各种形态的《周易》卦象，除了组合数学之外，还可以用一些现代数学理论或方法展开研究。例如，曹红军、厉树忠和刘亚楠诸位先生在《〈易经〉卦象符号的拓扑群结构》（《周易研究》，1995 年第 2 期）一文中认为：卦象的二进制排序“是如此的完美以至于几乎成为当前所有研究《周易》数学的基础”。在他们的研究中用到了拓扑学和群论。又如，在《易图的内涵格解释》（《哲学研究》，1994 年第 3 期）一文中，张清宇先生则“用数学中的格论的观念来研究易图的数学结构”。还有一些学者的研究用到了集合论及矩阵数学等方面的知识。虽然这些晚出的数学理论或知识都是古代占筮家们所不具备的，但是这些研究从现代数学的角度为后人提供了多种观察认识古老卦象的途径。不仅如此，学者们也许还会从卦象的构成和排序中发现一些有趣的数学规律，甚至推衍出具有新意的数学理论。至于立体排序，则是近人之作，能够排出的形态也很多。例如在三维正交坐标系中，除了前述的点阵排法，还可以在正八面体的各个面上分列八卦的 8 种卦象。又如使用极坐标时，则可以设计一套相应的规则，将各种卦象分置于球面或其他曲面上等等，从中可以发展出全新的数学理论亦未可知。

关于今本《周易》卦序，以及邵雍的伏羲先天卦序，甚至近人所作立体排序中所

反映的易学思想，是易学家们关心的课题，研究成果颇丰，但不属本书讨论的内容，故未予介绍。



伏羲六十四卦次序



伏羲六十四卦方位

图 2－13 伏羲先天图（二例）

（引自（宋）朱熹《周易本义》）

除了与二进制记数法等有关的数学方面的内容之外，伏羲先天卦序及其在平面上排成的 8×8 方阵还引起了不少近现代学者的关注，有的涉及到社会科学，有的则与现代自然科学有关。与前者有关的文献虽多，但本书可不涉及。而在与后者有关的著述中，就笔者所知，立论的基点往往具有“互证”的性质。例如，薛学潜先生在《易与物质波量子力学》（1937 年中国科学公司出版。在 2006 年 6 月上海人民出版社出版、蔡尚思先生主编的《十家论易》一书中有节选）中曾用“易方阵（按伏羲先天卦序排成的 8×8 方阵）引出物理学诸方程式”，薛先生的目的是“欲以晚近物理与易理互证”（引语见《十家论易》第 448 页和第 434 页），而不是从“易理”中推衍出“晚近物理”中所没有的新的物理学方程式。类似的情形也曾出现于天文学和化学等学科中。也许可以期待，缘于《周易》卦象的启发，学者们将在某些自然科学的领域中，取得一些具有创新意义的研究成果。

2.3.7 《周易》和《太玄》的卦象与二项式和三项式的关系

丁超五先生在《科学的易》[注4]中发现：若分别记阳爻和阴爻为 a 和 b，则八卦的八个卦象正好对应于 $(a+b)^3$ 展开后的八个项。即 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=aaa+aab+aba+baa+abb+bab+bba+bbb$。

按此思路，将 $(a+b)^6$ 展开后，必对应于六十四卦。即

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$。

而将 $(a+b+c)^4$ 展开后，必对应于《太玄》的八十一首，其中 a、b、c 分别代表《太玄》的三种爻符。即

$(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+4a^3b+4a^3c+4ab^3+4ac^3+4b^3c+4bc^3+6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2$。

由此，可以引起下述思考：

(1) 关于卦象

笔者估计，西周数学家还没有掌握二项式的展开方法，因而不能提出西周占筮家可能依据二项式的展开结果发明出八卦及六十四卦的猜测。类似地，也没有理由猜测《太玄》卦象的发明与三项展开式有关。

(2) 关于贾宪三角

宋代“贾宪三角”或“杨辉三角”实际上是一张二项展开式的系数表。载于《永乐大典》中的图形（参看图 2－14）共有 7 层，从上向下数的第 4 层对应于 $(a+b)^3$ 展式的 4 个系数 1、3、3 和 1，它们的和等于 8。而第 7 层对应于 $(a+b)^6$ 展式的 7 个系数 1、6、15、20、15、6 和 1，它们的和等于 64。这 7 个数必然也是某个本卦的 7 类之卦的分类卦数（参看本书第 5 章 5.3.3 节）。

①
① ①
① ② ①
① ③ ③ ①
① ④ ⑥ ④ ①
① ⑤ ⑩ ⑩ ⑤ ①
① ⑥ ⑮ ⑳ ⑮ ⑥ ①

图 2－14 贾宪三角

于是，可以提出这样的猜测：贾宪三角的发现也许受到过卦象构成规律的启发。

(3) **关于三项棱锥**

仿照图 2－9～图 2－12 的形式，可以将三项展开式的各项用若干全等三角形的拼接图形排列起来，下面只列出了对应的系数，以及系数的和：

$(a+b+c)^0$：	①	$1=3^0$
$(a+b+c)^1$：	① ① ①	$1+1+1=3=3^1$
$(a+b+c)^2$：	① ② ② ① ② ①	$3+2\times 3=9=3^2$
$(a+b+c)^3$：	① ③ ③ ③ ⑥ ③ ① ③ ③ ①	$3+3\times 6+6=27=3^3$
$(a+b+c)^4$：	① ④ ④ ⑥ ⑫ ⑥ ④ ⑫ ⑫ ④ ① ④ ⑥ ④ ①	$3+4\times 6+6\times 3+12\times 3$ $=81=3^4$

…

显然，令 $a=b=c=1$，即可证明 n 次三项展开式系数的和等于 3^n。

如果把上述图形逐层地叠置在一个四面体内，便能在这个棱锥中标识出代表了所展各项的若干点位，从而得到一种三项展开式在空间中的几何表达形式，不妨称之为“三项棱锥”。从中可以找到一些有趣的数学性质。当然，除了受到相关启发之外，这些内容与卦象之间已经没有什么联系了。进一步的讨论可参看本书的附录。

注　释：

［注 1］　20 世纪 40 年代，在四川阿坝理县版岩墓中出土的一件双耳陶罐上发现有“一八七一八九”的刻记。关于这条筮数的刻记时期，李学勤先生研究认为：“估计为西汉前期是有可能的。筮数流传到这样晚的时期，眼下尚无其他实例。”（李学勤：《周易溯源》，巴蜀书社 2006 年 1 月版，第 242～249 页）

［注 2］　在商周文物中还发现了数例形如  和  的符号。有的学者认为可能与《太玄》有一定的关系（张亚初、刘雨：《从商周八卦数字符号谈筮法的几个问题》，《考古》1981 年第 2 期）。有的学者释之为易卦，例如冯时先生在《中国天文考古学》（中国社会科学出版社，2007 年 1 月版，第 538 页）中即认为它们是 6 画卦的某种省略画法。李学勤先生则认为：“它们其实都是‘册’字。按照当时铭文体例，‘册’应为作器者的族氏，和卦画没有任何关系。”（李学勤：《周易溯源》，巴蜀书社，2006 年 1 月版，第 275 页）

［注 3］　参看（美）R 柯朗，H 罗宾《什么是数学》，左平，张饴慈译。（上海：复旦大学出版社，2005 年版，第 15 页）莱布尼茨曾说：“用一，从无，可生万物。”（参看 T. 丹齐克：《数，科学的语言》，商务印书馆，1985 年版，第 12 页）

［注 4］　相关内容可参看徐芹庭《易图源流》（北京：中国书店，2008 年版，第 671 页）刘毓璋先生在《易经之数理思想》（台北，民国 67 年（1978 年）11 月 25 日初版）中亦有类似内容。

参考文献：

［1］濮茅左．楚竹书周易研究．上海：上海古籍出版社，2006．435～485

［2］张政烺．易辨．见：中国哲学第十四辑．北京：人民出版社，1988．12～13

［3］李零．中国方术考．上海：东方出版社，2001．295

［4］李零．中国方术续考．上海：东方出版社，2001．310～311

［5］张政烺．易辨．见：中国哲学第十四辑．北京：人民出版社，1988．4

［6］河南省文物考古研究所．新蔡葛陵楚墓．郑州：大象出版社，2003

［7］李学勤．周易溯源．成都：巴蜀书社，2006．280～284

［8］湖北省荆沙铁路考古队．包山楚简．北京：文物出版社，1991

［9］张政烺．易辨．见：中国哲学第十四辑．北京：人民出版社，1988．7

［10］濮茅佐．楚竹书周易研究．上海：上海古籍出版社，2006．1～23

［11］韩自强．阜阳汉简周易研究．上海：上海古籍出版社，2004

［12］邓球柏．帛书周易校释．长沙：湖南人民出版社，1996

［13］胡阳，李长铎．莱布尼茨二进制与伏羲八卦图考．上海：上海人民出版社，2006．88

［14］胡阳，李长铎．莱布尼茨二进制与伏羲八卦图考．上海：上海人民出版社，2006．84

［15］邹大海．中国数学的兴起与先秦数学．石家庄：河北科技出版社，2001．172

［16］董光璧．易图的数学结构．上海：上海人民出版社，1987。本书引文系转引自郭志成、郭韬《走进伏羲》，光明日报出版社 2003 年 4 月版，第 144 页。

第 3 章 《周易》占筮术使用的揲扐算法

> 大衍之数五十，其用四十有九，分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰……是故四营而成易，十有八变而成卦。
>
> ——《易传·系辞上》

> 子曰：知变化之道者，其知神之所为乎！
>
> ——《易传·系辞上》

使用《周易》占筮术求占时，构成卦象的爻符须由揲扐算法的结果数确定。本章主要介绍传世《易》占揲算的操作规则和学者们从数学的角度研究这种求数方法的大概情况。

3.1 揲扐算法

历代占筮家、易学家和数学家对传世揲算的数学正确性及算法构造的神奇性均无任何异议。这种算法设计与《周易》占筮术中其他环节的完美配合，使揲算在《周易》占筮术的流传过程中一直保持了良好的稳定性和不可取代的地位。虽然在民间的占筮活动中往往有人认为揲算起卦比较麻烦，并发明出诸如“铜钱卦”之类的简化算法，但揲算仍然是最主要的、当然也是最正宗的起卦算法。从道理上来讲，任何一种能随机地得出具有奇偶意义的结果的方法都可以用来起卦，然而从数学史研究的角度来考虑，在目前所知道的历代占筮家曾经使用过的起卦方法或筮算方法中，《周易》揲算携带的数学信息最为古老也最为丰富，值得后人仔细研读。

3.1.1 《易传·系辞上》记载的揲扐算法

目前所知，《周易》占筮术所用成卦算法的相关记录，以战国时期成书的《易传·系辞上》的记载为最早。其文云：

> 天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十，凡天地之数五十有五。此所以成变化而行鬼神也。大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时。归奇于扐以象闰，五岁再闰，故再扐而后挂。《乾》之策，二百一十有六，《坤》之策，百四十有四，凡三百有六十，当期之日。二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。是故四营而成易，十有八变而成卦。八卦而小成。引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣。显道神德行，是故可以酬酢，可与祐神矣。子曰：知变化之道者，其知神之所为乎！

由于这种专门用于《易》占成卦的算法以“揲”和“扐”为主要特征，故称之为“揲扐算法”，简称“揲算”。而在传世文献中，则有“揲策”（《史记·龟策列传》)、“端策”(淮南子·说林训)、“行筹”(《汉书·谷永杜鄴传第五十五》)、“揲蓍”(《论衡·卜筮篇》)、“蓍算”、“筮算”等多种说法，就成卦算法而言，意思都是相同的。

上述记载涉及的数字不少，习惯上通称“易数”。易数中最基本的数字是从 1 到 10，表明当时使用的记数方法属于十进制，但没有表示数 0 的文字符号。其中奇数称为“天数”，偶数则称为“地数”。

古代易学家将人们关于数分奇偶的认识联系于天地神明，显示出易数的衍绎和比附具有为揲算寻求神学依据的意义。如果不去解释各数的易学含义，纯从数字得来的数学关系看，有如下述：

(1) **天数二十有五**

$1+3+5+7+9=25$

(2) **地数三十**

$2+4+6+8+10=30$

(3) **天地之数五十有五**

$25+30=55$

(4) **大衍之数五十**

50 这个数是怎么来的，易学家们历来有不同的说法。据彭涵梅先生在《大衍之数五十初探》一文中的研究，发现“主要的说法计有十三家之多”。[1]若不论易学含义，只考虑数字，可归结为以下情形（所涉人名都是古代易学家或数学家)：

①京房：10+12+28=50；

②马融：1+2+2+4+5+12+24=50；

③荀爽：8×6+2=50；

④邵雍：(1+3+5+7+9) ×2=50；

张行成：1+1+3+3+5+5+7+7+9+9=50；

⑤宋咸：1+2+3+4+5+6+7+8+1+3+10=50；

⑥陈抟：100÷2=50；

⑦李之才：1×2+2×3+3×4+4×5+1+2+3+4=50；

⑧秦九韶：2×3×4+3×4×1+4×1×2+1×2×3=50；

⑨虞翻、郑玄、刘牧：55−5=50；

⑩刘歆：5×10=50；

⑪扬雄：(1+6) + (2+7) + (3+8) + (4+9) + (5+5) =50；

⑫胡瑗：传抄过程中将“五十有五”漏脱“有五”二字，便成了“五十”。

彭先生认为，上述说法在数值计算上都是正确的，但相关数据的从出依据都有牵强比附之处，因而并不可信，只有排为第 13 家的汉代易学家王弼和唐代易学家孔颖达之说“可以接受”。王弼认为：

> 演天地之数，所赖者五十。其用四十有九，其一不用也。

孔颖达在《周易正义・卷七》中疏之曰：

> 据王弼此说，其意皆与诸儒不同，谓自然所须策者唯用五十。就五十策中，其所用揲蓍者，唯用四十有九。

这是说，要想揲算得以顺利实施，只能从 50 策中去掉 1 策。可见古代占筮家中也有人注意到了所用策数最终是 49 策，乃是服从自然法则，遵循数学规律的必然选择，是不可以按自己的想象任作比附的。既然核心的数字是 49，那么 55 或 50 是怎么进入《易传・系辞》中的仍然是一个问题。本书将在第 7 章 7.2.4 节中予以讨论。

(5) **其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰，五岁再闰，故再扐而后挂。”和“是故四营而成易，十有八变而成卦。**

这是与揲算成卦规则有关的内容，现将其中与数学计算有关的环节译出如下：

① “分二”。准备 49 根蓍草茎或筹策，将它们任意地分成两堆，这个用手动操作完成的环节就叫做“分二”。分 2 操作的特点是随机性，即必须是将 49 策随机地分成两堆，不能数好了再分，或对分拆进行人为的操控。当然，分拆时不能出现某堆的策数等于 0 的情形。在后续的计算过程完成以后，将因分 2 时的具体情况而得到不同的结果数，但可能出现的结果数一共只有 6、7、8、9 四种。然后依据所得结果数的奇偶

定出阳爻或阴爻，最终得出卦象。因而爻符的获取是随机的。《易传·系辞上》所说的“阴阳不测之谓神”，就是源于分 2 操作的随机性。虽然还可以按分 3、分 4 等方式来分拆筹策，但古代占筮家们在揲算中采用的是最简单也最适用的分 2。

②“挂一”。从任意一堆策中抽出 1 根策挂夹于左手小指与无名指指间的操作称为“挂一”。挂出的这根策将退出下一步的计算。显然，挂 1 就是减 1，是最简单的减法。由于挂 1 环节的设置具有很好的演示效果，大大增强了揲算过程的神秘感，是令信众深感筮算玄奥神奇的有效手段。就数学而言，这是一种对揲算基本算法的附加处理，是一种锦上添花的设计。它使人们在破解揲算的一般性规律时，遇到了额外的困难。

③“揲四”。所谓“揲”，专指《易》占中的点数取策操作。“揲四”即 4 根 4 根地将策分别从两堆策中数出，规则是数到每堆剩余的策数等于 4 或者小于 4，因而剩余的策数不会为零。似可认为，这一规则显示出揲算操作中并不直接地涉及数 0 的概念。“揲”的数学意义是做减法。从两堆策中揲得的策数必定是 4 的整数倍，合在一起后，将用于下一步的计算。揲策数取为 4，是一种规则性约定，是《易》占揲算所取参数中的一种。

④“归奇于扐”。“奇”的意思是零散、剩余。“归奇”是指将揲后剩余的策归拢的操作。“扐”的意思是将归拢的余策夹于左手食指、中指和无名指的两个指间，也是一种操作行为。注意到挂出的 1 策也是“扐”于指间，故有“挂扐”之称。所谓归扐之策可以理解为挂出的 1 策与揲后余策之和。这些策都将退出下一步的计算。“扐”的数学意义同样是做减法。由于要夹策于指间，在筹策粗细和长短上应有一定要求。1971 年 8 月，陕西千阳汉墓出土了一组用兽骨磨制的算筹，共得 31 根，长度多为 13.5cm，直径多为 0.3cm。[2]这些算筹很可能也用于揲算，从其尺寸来看，使用这样的筹策可以顺利完成挂扐操作。

⑤“四营而成易”。上述“分 2、挂 1、揲 4、归扐”四个操作步骤合称为“四营”。“易”即变易。“四营而成易”的意思是经过四营即完成一次变易。对 49 策实施四营操作，称为第 1 次变易。这里的变易有两种含义：第一种是因挂扐而有一部分筹策退出下一步的计算，使下一步计算时参揲的策数发生了变化。第二是进入下一步的参揲策数有 44 策和 40 策两种可能，变得的是哪一种，要看分 2 的情况才能确定。由于分 2 是随机的，所以具体得到的是哪一种也是随机的。

⑥“十有八变而成卦”。北周数学家甄鸾在《五经算术》中的相关注释是：

> 十八变者，三变而成爻，十八变而六爻也。

这句话的意思是经过 18 次变易后即能画出一个 6 画卦象，而每个爻符都是经历了 3 次变易之后才得到的。对 49 策做四营是第 1 次变易，再对揲得策数继续做四营，这是第 2 次变易，然后再次对揲得策数做四营便是第 3 次变易。由于每个爻符的确定都是独立完成的，即每个爻符都是从 49 策开始，经 3 次变易后得出，所以只需对求取 1 个爻符

的 1 轮揲算进行研究，就可以掌握揲算成卦的全部情况了。从具体的操作状态分析，一般没有必要计算每次变易完成后揲得的策数。不过，如果要作计算的话，可以使用以下四种方法：第一种是减法，即从参揲策数中减去挂扐策数，比如参揲策数是 49 策而挂扐策数为 5 策时，揲得的策数就是 49−5=44 策；第二种是加法，即每揲一次加上 4 策，停止点揲时加得的策数就是揲得策数；第三种是乘法，即用揲数 4 乘以点揲的次数，比如对于 49 策，挂扐策数是 5 策时，在拆分成的两堆策中一共点揲了 11 次，因而揲得策数是 4×11=44 策。显然，这也是使用加法时将揲数 4 连续累加 11 次的结果；第四种方法最原始，只需将揲得的筹策合在一起，然后逐根点数就可以了。

在上述引文中，“象两”，是指“分二”象征由太极分为天和地；“象三”，是指“分二”和“挂一”加在一起象征天、地、人，即所谓“三才”；“象四时”，是指“揲四”象征一年有四季；“象闰”是指“归奇于扐”象征古代历法中的闰月设置；“五岁再闰”则有再次变易重复归扐的象征意义。这些比附都是对揲算对应环节的易学解释，强调的是《周易》的道理“广大配天地，变通配四时”（语见《易传·系辞上》），它们既不是对揲算环节作数学解释，其本身也没有数学意义。

（6）**《乾》之策，二百一十有六。**

这句话的意思是与《乾》卦对应的策数为 216 策。这个数字的来源是 36×6=216。按前述揲算规则，在第 3 次变易完成时，可能出现的揲得策数有 36、32、28、24 策四种情形，后面将对它们的获得情况做详细的介绍，这里是先引用所得结果。占筮家们特别关注 36 和 24 这两个数。按每揲 4 策计算，在第 3 次变易中揲取 9 次时所得策数即 36 策。9 是一个奇数，对应于阳爻。由于《乾》卦的 6 个爻符都是阳爻，当它们都是由揲得 36 策或者都由结果数 9 所确定时，涉及策数为卦象确定情况中最多的一种，共有 36×6=216 策。

（7）**《坤》之策，百四十有四。**

这句话的意思是与《坤》卦对应的策数为 144 策。这个数字的来源是 24×6=144。按每揲 4 策计算，在第 3 次变易中遇到揲取 6 次时，所得策数即 24 策。6 是一个偶数，对应于阴爻。由于《坤》卦的 6 个爻符都是阴爻，当它们都由揲得 24 策或者都由结果数 6 所确定时，涉及策数是卦象确定情况中最少的一种，即 24×6=144 策。也许由于这个原因，占筮家们称阳爻为“九”，而称阴爻为“六”。

（8）**凡三百有六十，当期之日。**

《乾》之策和《坤》之策相加，得 216+144=360，这个数正好是一年 365 天的概数。

（9）**二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。**

64 个卦象一共有 6×64=384 个爻符，其中阳爻和阴爻必定各占一半，即各有 384÷2=192 爻。占筮家们视阳爻为 9，阴爻为 6，再考虑揲数 4，可得阳爻之策数为 9×4×192=6912，阴爻之策数为 6×4×192=4608。两个策数相加，得 6912+4608=11520。对古人来说，这已是一个不小的数字，象征着世间万物。作为易数，216、144、360 和

11520 诸数都是通过加法、乘法和除法衍绎而得的。

按这种方法揲算 3 轮得到的八卦只是“小成”，扩展到揲算 6 轮，演化出六十四卦以后，则“天下之能事毕矣”。

这套算法是如此神奇和富于变化，以至于孔子说：“通晓变易之道的人，可以探知神祇的意图！”

《易传・系辞上》所载的这段文字，对揲算操作要点的概括极为凝练，虽然与传世的揲算操作相对照，涉及的各个计算环节都完全一致，但是对于依据揲算结果数 7、9 定出阳爻和 6、8 定出阴爻的成卦约定或规则却缺少具体的交待，需经过对《乾》之策 216 和《坤》之策 144 的推演，才能对这一定爻成卦的约定间接地有所了解。尤其是注意到这段文字对揲算的主要环节都做了易学比附，使人意识到这些内容不像是对新近才发明的算法的推介说明。从行文特点上看，重点是从易学角度对揲算要点进行引申解释，并通过易数的衍绎，着重宣讲易道的“广大悉备”（语见《易传・系辞上》），而不在于介绍揲算本身。这种与传文性质相符合的做法似乎表明，揲算定型为传世形态的时期，应远在《易传・系辞》成书以前。笔者推测揲算定型的时期应不迟于西周晚期，当为西周占筮家们的发明。

在目前所知的各种古代《周易》文本中，不论经文还是传文，都不专门介绍占筮操作规则和具体仪式，前引“大衍之数”章的内容，是传文中涉及筮法的极少例外。这一珍贵的记载是历代学者研究《周易》占筮术和我们研究西周数学的基础材料。由于周王室的信奉，孔夫子的喜好，左丘明的载述，秦始皇的不禁，汉武帝的尊崇，《周易》占筮术和易学研究在中国的传统文化中占有较高的地位。因而其经文、卦象和揲算方法在传世的过程中，自春秋以降几乎没有发生变化，尤其是唐初学者孔颖达在《周易正义》中做了注疏，南宋学者朱熹和蔡元定在《易学启蒙》和《筮仪》中亦有详细说明，使后人对揲算的基本规则有着相当完整的了解。所以朱伯崑先生认为：

> 据《周易》称阳阴二爻为九六，以及《左传》对筮法的解释，如区分本卦和之卦，《易传》提出的揲蓍成卦说，是大体可信的。[3]

3.1.2 孔颖达和朱熹对揲算的疏注

唐贞观十六年，即公元 642 年，孔颖达作《周易正义》，他在疏文中对《易传・系辞上》“大衍之数”章所载的揲算成卦过程做了详细的解释，并记录了一种枚举出所有可能出现情形的方法，用来证明揲算是万无一失的成卦算法。

孔疏曰：

> 初一揲，不五则九，是一变也。第二揲，不四则八，是二变也。第三揲，亦不四则八，是三变也。

南宋淳熙丙午（公元 1186 年），朱熹和蔡元定作《易学启蒙》，其中“明蓍策”章对孔疏做了进一步的注解，并用黑点构图为示（图 3－1），使揲算过程更加清晰明白：

（第 1 变的挂扐策数）得五者三，得九者一。（第 2 变和第 3 变的挂扐策数均为）得四者二，得八者二。

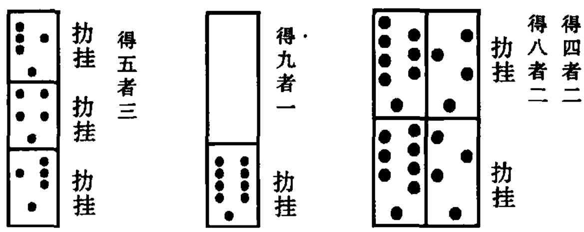


图 3－1 《易学启蒙》中的挂扐策数示意图

结合“大衍之数”章，将孔、朱疏注释为白话，即：

（1）**第 1 次变易**

对 49 策做四营。不论分 2 时分成什么样子，归扐的策数一共只有以下 4 种可能出现的情形：

①挂 1，一堆余 1，另一堆必余 3，共归扐 5 策；

②挂 1，一堆余 2，另一堆必余 2，共归扐 5 策；

③挂 1，一堆余 3，另一堆必余 1，共归扐 5 策；

④挂 1，一堆余 4，另一堆必余 4，共归扐 9 策。

孔疏“不五则九”，所说即第 1 变时，归扐的策数有 5 策或 9 策两种情况。而朱注“得五者三，得九者一”，所说共有 4 种归扐情形，其中归扐 5 策的有 3 种，而归扐 9 策的只有一种。

相应地，在第 1 次变易后揲得的策数也有两种可能：当归扐 5 策时，揲得策数就是 49－5＝44 策；当归扐 9 策时，揲得策数则是 49－9＝40 策。它们必然是揲策数 4 的整数倍。这两种策数都将进入第 2 次变易。

（2）**第 2 次变易**

对 44 或 40 策做四营。不论分 2 时分成什么样子，归扐的策数都只有以下 4 种可能出现的情形：

①挂 1，一堆余 1，另一堆必余 2，共归扐 4 策；

②挂 1，一堆余 2，另一堆必余 1，共归扐 4 策；

③挂 1，一堆余 3，另一堆必余 4，共归扐 8 策；

④挂 1，一堆余 4，另一堆必余 3，共归扐 8 策。

孔疏“不四则八”，所说即第 2 次变易时，归扐的策数有 4 策或 8 策两种情况。而朱注“得四者二，得八者二”，是说在 4 种可能出现的归扐情形中，归扐 4 策和归扐 8 策的

情形各占两种。

相应地，第 2 次变易结束后，可能出现的揲得策数有 4 种：

44 策时，有 44－4＝40、44－8＝36 两种；

40 策时，有 40－4＝36、40－8＝32 两种。

或者说揲得的策数将有 40 策、36 策和 32 策 3 种可能的情形，它们同样必定是揲策数 4 的整数倍。

(3) 第 3 次变易

对 40、36 或 32 策做四营，不难验证它们的归扐策数都“不四则八”，而且都是“得四者二，得八者二”。相应地，第 3 次变易之后的揲得策数就有下面 6 种可能出现的情形：

40 策时，有 40－4＝36、40－8＝32 两种；

36 策时，有 36－4＝32、36－8＝28 两种；

32 策时，有 32－4＝28、32－8＝24 两种。

不计重复的策数，揲得的策数将有 36 策、32 策、28 策和 24 策 4 种可能的情形。

最后，将揲得的策数分别除以揲数 4，得：

36÷4＝9、32÷4＝8、28÷4＝7、24÷4＝6。

这就是揲算完成后，可能得到的 4 种结果数。北周数学家甄鸾在《五经算术》一书中的相关注释是：

> 三十六策然后得九一爻，二十四策然后得六一爻。

这段话的意思是说：36 策是第 3 变时揲 4 共 9 次的结果，并用 9 定出阳爻；而 24 策则是第 3 变时揲 4 共 6 次的结果，并用 6 定出阴爻。甄氏略而未述的是第 3 变时揲得 32 策时对应于结果数 8，揲得 28 策时对应于结果数 7，并依据它们分别定出阴爻和阳爻。事实上，在传世的《周易》占筮术中，将揲算结果数转化为卦象的规则就是得奇数 9、7 时画出阳爻，得偶数 8、6 时画出阴爻。因而完成包含 3 次变易的一轮揲算一定能定出一个爻符，这个爻符可能是阳爻，也可能是阴爻。在《周易》占筮中，第一轮揲算得到的爻符画在最下面，以后依次向上画，直到画满所需的 3 个或 6 个爻符，即得出一个卦象。画出 3 个爻符时得到的是八卦中的一个卦象，而画出 6 个爻符时得到的则是六十四卦中的一个卦象。

显然，孔、朱所载既是揲算过程的详解，又对揲算的数学正确性给出了一种验证性质的证明。正是基于这种验证，古代占筮家们知道这是一种万无一失的算法，可以放心地用于成卦计算，只要操作上不出差错，一定能够随机地得到 8 种或 64 种卦象中的某一个卦象。

从数学上看，上述验证性质的证明是通过逐一枚举出所有可能出现情形的方法完成的，在八卦和六十四卦的构成中，我们已看到了这种思路的另外一种应用形态。笔

者认为，这是在古人数学思维逐渐发展的过程中出现的一种典型的论证方法，不妨称之为全举法。即：将所有可能出现的情形全部枚举出来的论证方法。在中国古代数学史的研究中，将这种思路及论证方法概括为全举法，有时是很方便的（参看本书第8章8.4.2节）。

3.2 关于揲算和易数的数学观察及讨论

经过前面的介绍，我们已对传世的《周易》占筮术中使用的揲算成卦规则和具体操作有了比较完整的了解，并且接触到一些出现于《易传·系辞》中通常被易学家们称为易数的数字。在用现代数学方法对揲算进行研究之前，不妨先对揲算和易数的数学特点作一些观察和讨论。

3.2.1 揲算具有原始古朴的计算形态

揲算的计算形态显得原始与古朴，主要表现为所有的计算都用点数筹策的方式完成。在具体地观察和分析揲算环节时，不难发现下述两个方面的特点：一方面，揲算中没有使用类似于传世筹算用来记数的筹符数码，每根筹策只代表数1，揲算时对筹策的点数操作有些类似于通过直接点数事物以知其数的原始做法；另一方面，在揲算的点数计算过程中无需建立明晰的四则运算概念，给人一种仿佛还处于不知运算概念的时代的感觉。

揲算用49根筹策起算，这是一个准确的数量，只能通过直接点数筹策的根数来核定。接下去的“分二”是不做点数的任意分拆，作为规则，是要利用这个具有随机性的环节排除人为操控，以保证揲算结果的获得纯属天意。显然，“分二”与四则运算没有关系，应该是一种有着古老来源的十分原始的操作。

“挂一”和“揲四”都经由点数筹策完成，虽然数学上属于减法运算，但在占筮术和易学中强调的是称为“挂”和“揲”的特殊操作，这种做法是用具有神秘文化含义的专用词汇来表示日常生活中所说的减法运算。或者说，易学家们是用“挂”和“揲”的易学词汇代替了减法的概念。

“归扐”是将挂出的那根策与揲余的两处余策加在一起，然后将它们移开，退出下一步的计算，这种退出也是做减法。由于无需点数或计算归拢的策的数量，因而强调的是具有神秘文化意义的“扐”策操作，而不是加法和减法运算。

确定一个爻符的一轮揲算中安排了3次变易，每次变易完成后，进入下一步计算的策数由揲取的策数确定，其数量可以通过边揲边加或揲完后直接点数揲得的策数获知。又因此数肯定是4的整数倍，只要记住揲策的次数，将其与4相乘也可以求得。此外，还可以用参揲策数减去归扐策数得出。但是在揲算中并无确知进入下一步计算

的策数的必要，只要开始时数准参揲的 49 策，并按规则完成揲扐操作，进入第 2 次和第 3 次变易的参揲策数是无需另作计算的。因而在这个环节中同样不必明确数学上的加法、减法或乘法的运算概念，只要依序完成点数操作就可以了。

3 次变易之后得出的结果数有 6、7、8、9 四种可能，具体得到的是哪个数，可以用第 3 次变易中每揲 4 策的揲取次数确定。比如第 3 次变易过程中的揲取情况是从一堆策中揲取 4 次，从另一堆策中揲取 2 次，连在一起点数，可知揲取 6 次（共揲得 24 策），那么这一轮揲算得到的结果数就是 6。这是用点数揲 4 次数的方式确定结果数。当然，也可以用除法求出此数，例如点数得知第 3 次变易中揲得 24 策，再除以揲策数 4，根据九九口诀用心算即能求出结果数为 6。在后人看来，用除法得到结果数比较方便，但是若用前一种点数揲 4 次数的办法，就不必使用除法求取结果数，因而可以在并不明确除法运算概念的情况下完成揲算。

揲算的结果数共有 6、7、8、9 四种可能，而爻符只有阳爻和阴爻两种。定爻规则是得到奇数 7、9 时为阳爻，得到偶数 6、8 时为阴爻。由于数分奇偶或单双应是人们关于数的一种相当古老的认识，这种认识的出现当远在四则运算概念的形成之前，从而使得依据得数的奇偶确定爻符的做法显得原始与古朴。

总之，在揲算的全过程中，所有的计算都可以通过点数的办法来完成，包括点数筹策的根数和点数揲策的次数，既不引入类似于传世筹算中记数用的筹符数码，也没有非得明确四则运算概念不可的要求，只需按规定的程序完成点数操作，就一定能从 6、7、8、9 四个数中得出某一个结果数，然后据其奇偶定出爻符。这种原始古朴的计算形态和眩人眼目的操作设计，有效地强调了揲算的古老与神秘，为揲算是古圣人的通神之作的易学解释提供了非常合适的背景。在这里，“数”和“算”都于世俗的及数学的理解之外，衍生出与神学相关的意义，强调了《周易》占筮术是人与天地神祇进行对话的途径，而揲算的结果则被认为可以通过与卦象及繇辞的配合，显示出与求占事宜相关的天命运程和人事吉凶。

3.2.2 揲算是程序化的算法设计

如果只限于讨论各个揲算环节中用点数筹策的方式完成 50 以内正整数的四则运算，不难得出揲算中的数学知识并未超出殷商时期的甲骨卜辞中显示出来的数学水平的结论。这样一来，从数学的角度去研究揲算就没有太大的意义，顶多只能作为当时已能进行简单的正整数四则运算的一个实用例证。

但若不是将揲算拆散为一些孤立的计算环节，而是从整体上再作观察，就会发现揲算是一套完整的程序化的算法设计。这里所说的“算法”，并不仅指基本的数算法则，更是指用来解决具体的数学问题的具有完整结构的计算方法。作为专用算法，揲算已经构成了一则数学命题，而且可以认为古代占筮家们依据全举法思路已经证明了揲算是一则数学上的真命题。可以说，发明揲算的占筮家们同时还算得上是当时的数

学家。

按照程序化算法设计的思路，可以用下述的方式来分析揲算成卦的点数操作过程：

“四营成易”是在一次变易中包含“分二”、“挂一”、“揲四”、“归扐”4 个计算环节。

“三变成爻”是在 3 个不同的用策条件下完成 3 次变易后才能得出一个爻符。也就是说，为了求取一个爻符需要重复 3 次“四营”。

“十八变成卦”是独立地求出六个爻符后才能画出一个卦象。也就是说，为了求取一个卦象需要完成六次求取爻符的计算，或完成 18 次“四营”。

不难看出，按照这样的思路进行分析，“四营”和“三变”是处于不同层次上的子程序，求取卦象的整套揲算正是由它们构成的一种程序化的算法。将所有计算环节和子程序成功地联为一体的，是正确无误的数学关系和严密适配的逻辑结构。在用《周易》占筮术求占时，只要严格地按照这套操作程序去做，就一定能从六十四卦中随机地得出一卦。

上述观察表明，揲算是一种专门用于解决《易》占成卦需求的，具有完整的程序结构的算法设计。由于在已知的中国古代数学资料中，还没有发现比揲算更为古老的程序化的算法设计，可以认为，揲算是完整地保存至今的最为古老的程序化的专用算法。通过对揲算的全面研究，有助于丰富我们对于《周易》占筮术和西周数学的认识，因而是一件有意义的工作。

根据《周礼·保氏》的记载，“九数”是西周时期的“六艺”（六种技艺）之一，涉及九种类型的数学知识。但因相关材料的缺失，目前尚不确知西周“九数”的内容具体是什么样子。一般认为汉代成书的《九章算术》与西周“九数”有一定的承续关系，因而推测《九章算术》中包括实用算法设计在内的一些内容可溯源于西周“九数”。或者说，西周“九数”中可能已经出现了一些解决实用计算问题的专用算法。但这仅仅只是一种猜测，迄今还没有找到具体的例证依据。揲算的存在显示出西周时期已出现了算法设计的数学思想，这种思想当不止反映于占筮术所用算法的设计中，极有可能还会被应用于与生产生活相关的日益丰富的计算需求中。这样，揲算的存在就为西周“九数”中已经出现了一些实用算法的推测提供了一个间接的证据。

揲算在记数和计算上显得原始和古朴，而在程序化的算法设计上却显示出先进的数学思想，表明揲算既有古老的渊源，又是当时先进数学思想的一个应用成果。一般认为，占筮术起源于古人对数的神秘崇拜，这种神秘崇拜与古人惊奇于当时发现的记数及计算规律有关。古代占筮家们肯定意识到，获取吉凶判据的方法必须具有出于天意而非人为的性质，否则不会被信众所接受。虽然能够提供随机结果的求数方法并不少，比如掷骰子等等，但与揲算相比，不论是方法设计的精巧奇特，还是演示效果的神奇眩目，都难出其右。揲算的发明应当经历了一段为时不短的过程，在占筮术的传承过程中，应有不少占筮家为占筮算法的优化改进作了努力。笔者估计，早期筮算的核心环节是“分二”操作，正是这一操作使筮算结果获得了关键的或奇或偶的随机性。

然而单纯使用“分二”操作的占法虽能方便地满足随机性要求，但却显得过于简单而少有玄机，特别是与社会生活的复杂化和人们的数学能力已有明显进步的情况相比，这种原始与古朴的形态反而会显得落后。占筮家们在承续已有算法的基础上，发挥了自己的聪明才智，采用设置多重计算环节并加以程序化的方式弥补了这一缺憾。在发明程序化算法的过程中，他们应该对入算策数、揲策数、变易次数、可能出现的结果数以及是否“挂一”做了精心的比较和优选，并且在通过全举法的使用以确保数学正确的前提下，对具有随机特性的“分二”和原始古朴的点数计算环节进行了程序化的处理。正是由于占筮家们在传续下来的原有占筮算法的基础上，有效地调整改进了算法设计，丰富了计算内容和强化了演示效果，才发明出传世揲算这种独特的程序化了的筮算方法。

3.2.3 易数的数学特点

最早的易数记录与揲算同见于成书于战国时期的《易传·系辞上》。但因易数是一些确定的数值，且对应于《周易》占筮术使用的揲算，笔者推测，易数的产生顺序应在包括揲算和卦象在内的整套《周易》占筮术定型以后。

西周占筮家们在揲算的发明、定型过程中接触到的筮算方法应当不止一种，他们在这些筮算方法中遇到的数肯定会比传世揲算中涉及的数多。尽管在他们看来，这些筮算方法和与之相关的各种数据都具有神秘性和哲理性，可是在占筮术的这一发展阶段，占筮家们在实际应用中必然会发现所用占法的缺陷，与解读占筮结果的研究相比较，应当更为重视包括筮算方法在内的占法的改进。或者说，在《周易》占筮术定型以前，占筮家们对于与筮算和揲算相关的数学方面的考虑更为重视，还不具备淡化数学关系、偏重于从神学和哲学的角度去认识出现于各种占筮算法中的数的条件。

《周易》占筮术定型以后，情况发生了变化，古代占筮家们面对臻于完善的整套《周易》占筮术，特别是关于揲算、卦象和经文，已不存在加以实质性改进的可能。对《周易》这一古圣人的通神之作，古代占筮家们的研究方向或可能的发展空间主要是占测运用而不是占法改进。实践的结果表现为神学化和哲理化的倾向不断增强。在这样的情况下，易数的形成势在必然。易数是易学概念，除了与当时的数学知识有着天然的联系，易数更与中国古代的神学和哲学观念有关，因而通常并不将易数视为单纯的数学概念。

若不考虑“筮，数也”（《左传·僖公十五年》）之类相对笼统的说法，大多数情况下，易数都是具体的数。大体上，可以将它们分成3类，并作下述观察：

（1）**直接与揲算和卦象有关的数**

在传统易学中，揲算和卦象涉及的数都是最基本的易数，主要有参揲策数49，分拆数2，揲策数4，变易次数3和18，揲算的结果数6、7、8、9，八卦的画数3和卦数8，六十四卦的画数6和卦数64等等。这些数的出现与定型后的揲算规则和卦象构成

相关，对应于确定的数学关系。但是占筮术不是数学，在占筮家眼中数学规律体现的更应该是神意，他们更注意从神学的角度阐释这些数。结果，这些数都成了易学中的易数。前述《易传·系辞上》引文中的“象两”、“象三”、“象四时”便是先秦易学家对“分二”、“挂一”、“揲四”的易学解释，这些解释显然地不具有数学意义。到了汉、晋时期，易学内容大为丰富，用易学观念来指导人们关于数的认识似乎成了一件时髦的事情。例如，在《说文解字》中，对六、七、八、九这4个数的解释是：

《易》之数，阴变于六，正于八。……七，阳之正。……九，阳之变。

似乎对日常意义上的六、七、八、九这4个数是无需解释的，而相关的易学解释才是真正的学问，不能忽视。

（2）**衍绎形成的数**

以第1类易数和揲算过程中出现的一些数据为基础，易学家们通过衍绎计算的方式得到了另外一些易数。当然，衍绎的目的是进一步地宣讲“易道广大”，而不是对揲算进行数学解释。出现于《易传》中的衍绎类易数有“《乾》之策”216，“《坤》之策”144，“当期之日”360，“两篇之策”11520等等，一般以策数为量纲。这类易数有明确的衍绎依据，都是利用揲算数据和卦爻参数经四则运算得到的准确数字，具体计算参看本章3.1.1节，这里不再重复。这些数中有的达到了万的量级，显然不宜用点数筹策的原始办法来求得。由于《易传》记录这类数时未附相应的计算说明，所以不能确知当时是用什么办法完成衍绎计算的。笔者推测，易学家们的衍绎计算很可能是用当时的筹算完成的。果如是，则衍绎类易数的记录表明，春秋战国时期的筹算确实已发展到能够正确地完成进位量级上万的正整数四则运算的程度了。易数的衍绎虽然谈不上算法的设计，但却为我们提供了一些先秦时期的占筮家们完成四则运算的实例。在不少与先秦数学有关的著述中，学者们列举了一些四则算例，而有的衍绎类易数的求取计算则不失为很好的补充材料。

由于衍绎类易数多与揲算过程中出现的一些策数有关，因而分析衍绎求数所依据的数量关系可以帮助我们弄清揲算成卦过程中的一些具体环节。《易传·系辞上》关于揲算的记录较为简练，其目的在于进行易学宣讲而不在于介绍揲算的具体操作。占筮时，筮者需要根据师传口授的完整方法才能完成揲算和求取卦象。可见，行用于先秦时期、但在《易传》记录中缺失的一些揲算成卦的环节是否确如传世揲算的做法，是需要加以考证的。例如，其中一个环节是如何根据揲算结果数定出爻符，在《易传》中对此就没有明确的说明。而在实际操作中，9、7得阳爻，6、8得阴爻的做法保存于师传口授的方法中，并历来被确认为古法。传世做法之可信，可以用“《乾》之策”216和“《坤》之策”144的衍绎依据予以证明。虽然由这两个易数只能推知得9出阳爻和得6出阴爻，但加上《左传》所记“遇某卦之某卦”的变卦占法，即可推知9、7得阳爻，6、8得阴爻的约定确为春秋战国时期的揲算成卦规则。此外，在“两篇之策”

11520的衍绎依据中也有9、6两数，因而对这个易数的分析同样具有核验或印证揲算成卦规则的作用。

(3) 具有比附意义的数

第3类易数具有比附的性质。《易传》将奇数比附为“天数”，将偶数比附为“地数”，从而将1～10共10个正整数的和55比附为“天地之数”，并认为50是“大衍之数”。除求取这些易数时使用了四则运算之外，比附的依据来自古人的神学观念和哲学理念，与数学并没有实质上的联系。

数分奇偶是古人对正整数的一种认识，在1～10这10个数中包含了奇数和偶数各5个，引入天地观念以后，就转化成了天数和地数各5个，它们的和分别等于25和30，加在一起得到的55便顺理成章地被比附为“天地之数”。

50这个数在易学中被称为“大衍之数”，其由来比较费解，历代解释甚多。《汉书·律历志第一上》记载的是典型的易学解释：

> 是故元始有象一也，春秋二也，三统三也，四时四也。合而为十，成五体，以五乘十，大衍之数也。而道据其一，其余四十九，所当用也，古蓍以为数。

可见“大衍之数”50的比附依据来源于元始之象之类的观念和古人对一些重要的自然现象的观察及认识。也许因为涉及到加法和乘法的计算，有衍绎的含义，所以称之为“大衍之数”。

易学家们实际上是想通过55和50这两个数，将人算策数49与天地观念联系在一起，为《易》占用策49提供一种神学性质的解释。显然，关于比附类易数的研究主要涉及易学的领域，对于从数学的角度研究揲算的帮助是很有限的。

不难看出，易学家们在解读易数时最常用的方法就是比附。例如“象两”、“象三”、“象四时”、“象闰”、“当期之日”、“万物之数”等等，都是对相关易数的比附性解释。

虽然易数是易学概念，但它毕竟是“数”，因而可以从数的角度，对易数作一些讨论。揲算以筹策为工具完成求数运算，整个算法并不联系于具体的事物，属于纯粹的关于抽象的数的计算。数分奇偶的认识与具体事物无关，这一认识在占筮家们依据揲算结果数的奇偶决定得到的是阳爻和阴爻时，已有明确的表现。八卦和六十四卦的构成与揲算结果数的记录密不可分，因而任何一种卦象都不是某种具体事物的影象。这些情况表明，所有的易数都具有抽象的意义。或者说，所有的易数都不固定地联系于某种具体的事物。在易学中，易数超然物外，却又无处不在，它们依循古人对自然界和人类社会的理解及相应的思维方式，以自有的特殊形式联系于世间万物。易数的抽象性使之具有一定的普适性，因而古人常常将易学作为理论，将易数作为根据，用来解释他们观察到的一些自然现象或社会现象。这种情形为易学成为春秋战国，尤其是

汉晋及唐宋时期的神学和哲学的一种载体起到了促进的作用。可以说，易数源于占筮，但其影响却远远地超越了占测算命的古老空间而遍及音律、历法、医学、数学、化学，甚至工艺技术，在中国古代的政治、军事、经济和传统文化中常可见到易数的踪迹乃是不足为奇的事情。

3.3 揲算研究概况

用现代数学方法和从数学史的角度研究《易》占揲算，大体上有以下几方面的内容：

——用现代数学方法解读以《易》占揲算为算例的一般性揲算命题；

——用现代数学方法计算《易》占揲算结果数的出现概率，以及与之相关的一些随机现象的出现概率；

——对传世揲算的定型过程和定型时期进行合理的推测；

——对传世揲算的数学特征进行归纳和分析；

——研究结果的应用。

本书将对上述课题进行尝试性的探讨，希望通过对揲算中蕴含的数学问题的讨论，丰富我们对西周占筮和相关数学内容的了解，为传统文化的研究和中国古代数学史的研究提供一些参考。当然，揲算中的数学问题应不止此，本书所涉只是其中的一部分。

3.3.1 《易》占揲算是初等数论中的一则特殊真命题

在本书中，“揲扐算法”一词有两个层面上的用法：一是指《周易》占筮中使用的成卦算法，此时，揲扐算法属于一种特殊命题；二是指《周易》揲算模式下的一般性算法，此时，揲扐算法是一则一般性的数学命题。所谓一般性，具体地说，是将参揲策数表为揲策数、变易次数和结果数的函数。相对于一般命题而言，《易》占揲算只是在分2挂1条件下，参揲策数为49，揲策数为4，变易次数为3和结果数为6、7、8、9的一个具体算例。本书第4章给出了一般性揲算命题的一种表述形式，并用相关的数学方法证明了该命题的正确性。这个结果证实了一般性揲算命题的存在性。当然，笔者所得到的只是一种表述形式，是否还存在其他形式，或者说，关于一般性揲算命题的归纳是否具有惟一性，还是一个有待研究的问题。

从相关的命题归纳情况来看，揲算命题属于现代数学中的初等数论范畴。根据孔颖达的注疏，已经确知古代占筮家们用全举法对《易》占揲算进行了严格的验证，因而它是一则真命题。这个结论通过对一般性揲算命题的证明，也得到了证实。所以，《易》占揲算的确是初等数论中的一则特殊真命题。

3.3.2 揲算研究的大概情况

《易传·系辞上》“大衍之数”章关于揲算的记载十分珍贵，是历代学者研究《周易》占筮和西周数学的重要材料之一。《易传》中的这段文字对揲算操作要点的概括极为凝练，或者说相当准确和基本完整，在掌握具体占筮操作方法的条件下，一般可以作出正确的理解，不会产生歧义。从《尚书》和《周礼》的记载中，重要的卜筮之术主要控制于王室贵族的情况来看，西周时期周人使用的《周易》占筮术并无广泛的流传。而《左传》《国语》《诗经》《易传》以及诸子著述等文献中的相关内容则显示在东周时期，即春秋战国时期，《周易》占筮术已广泛流传于各诸侯国的王室及民间。从此以后，人们对《周易》的应用便传承不绝，一直延续至今。在这个过程中，从孔子开始，研究《周易》的学者也是层出不穷，他们出自不同的目的，于占筮预测之外，研究的内容也各有所异，但大体说来，几乎都集中于易学、哲学、史学和文学等范畴，而从数学角度展开研究的人则相对很少。因此，从数学的角度对揲算研究情况的概括显得比较容易把握一些，可以大致地划分成下述几个阶段：

（1）第一阶段

古代占筮家们完成了《易》占揲算的发明和定型。这是一个从原始占筮算法发展为揲算的漫长过程。毫无疑问，古代关于数的概念、记数及数算的出现引起的对数的神秘崇拜是占筮术及筮算产生和发展的基础，而筮算的应用和改进又促进了古人对数及算法的驾驭能力。古代占筮家们对筮算的研究与当时人们掌握的数学知识有着直接的关联，他们依据经验的积累和实际的筮算摸索，逐渐找出揲算这样一种特殊的算法模式，最后完成了改进定型的工作。在这个阶段中，古代占筮家们涉及的都是各式各样的特殊命题，绝无先建立一般性命题，再从中选出适用算法的可能。他们能够在所构建的算法模式中找到一种既最为合适又精巧玄秘的成卦算法，而且是一则数学上的真命题，已经是一件非常不可思议的事情了。

（2）第二阶段

春秋战国时期的占筮家们对西周前辈们发明的揲算方法似乎非常满意并奉为圣人之作，因而在算法设计上并无实质性的改进或调整，只是随着易学的发展，将与揲算相关的一些数据引申为各种“易数”，使人们对数的神秘崇拜有了更为丰富的内容和想象空间。通过对《易传》中出现的各种易数的分析，除了《易传·系辞上》中与揲算直接相关的内容，这些易数几乎没有一个可以作为数学解释而有助于人们了解揲算。易数的出现是这个阶段的主要特点，其产生的背景和实际效果都与《周易》占筮术的广泛使用有关，对充实易学内容有明显的作用。这个阶段一直延伸到汉晋时代，形成了所谓的“汉晋易学”。在汉晋时期，占筮家们的思路大有拓展，在他们手上《周易》已然成了一部古代传下来的百科全书，并在易学的框架下，形成了象数派和义理派两个主要的易学流派。但是他们关心的“数”基本上都是易数，而不是对揲算的数学研

究。这种情况似乎与后来的占筮家们再也设计不出比传世揲算更能满足占筮要求的求数算法有一定的关系。(参看本书第 6 章的 6.3 节和 6.4 节，以及第 7 章的相关内容)

尽管汉晋时代的数学家们几乎个个都是占筮家，甚至是易学家，然而他们对揲算的研究仍未超出易数的范围。另一方面，他们还常将自己或他人在数学研究中取得的成果与易数联系在一起。比如张衡对球体体积的计算，就被视为是“协其阴阳奇偶”(语见《九章算术注·卷四》)的结果，这里的“阴阳奇偶”指的就是易数。三国时期，魏国数学家刘徽作《九章算术注》。在中国古代数学史上，这是一部极为重要的著作。他在序中说：

> 昔在包牺(伏羲)氏，始画八卦，以通神明之德，以类万物之情。作九九之术，以合六爻之变。

认为易数是数学的渊源。

汉代独尊儒术，列《周易》为五经之首。与经文和卦象一样，传世的揲算起卦规则亦属经典，已无调整改动的可能，易数也因此显得神圣而不可逾越。在这样的背景下，焦延寿的《易林》占筮术和扬雄的《太玄》占筮术都只不过是模仿《周易》的新法创制，如果认为它们是对《周易》占筮术的改进，则效果并不理想。事实上，中国历史上出现的占筮术还有不少，但流传都十分有限，无一能够取代《周易》。《汉书·律历志第一上》以及东汉学者王充的《论衡》等书都曾论及揲算，然而这些文献的立论，大体上仍属易学范围，均与数学无关。

(3) **第三阶段**

北周数学家甄鸾著有《五经算术》一书，称揲算为“《周易》策数法”，作“待算乃明者列之”(语见《四库全书·五经算术·提要》)。《五经算术》中说：

> 三十六策然后得九一爻，二十四策然后得六一爻。十八变者，三变而成爻，十八变而六爻也。

这是目前所知关于揲算具体规则的最早的注解。其实，在《易传·系辞上》的“大衍之数”章中，并没有明确交待由揲算结果数 7、9 定出阳爻，以及由结果数 6、8 定出阴爻的定爻规则，因而甄氏的注解是我们了解将揲算结果数转变为爻符的规则的依据之一。注意到这个注解可以用“大衍之数”章中“《乾》之策，二百一十有六，《坤》之策，百四十有四。”的易数衍绎进行核验或证实，从而据以判定甄氏所录并非北周时期才出现的做法，应该就是由占筮家们逐代传承下来的西周时期揲算定型时使用的定爻成卦规则。

此后有多种关于《易传·系辞上》所载“大衍之数”章揲算规则的注解，其中以唐贞观十六年，即公元 642 年，孔颖达在《周易正义》中对揲算的全举法验证，以及

南宋淳熙十三年，即公元1186年，朱熹和蔡元定在《易学启蒙》中对揲算的注释影响最大。这个阶段的特点是对《易传》所载揲算做注疏解释，使后人对揲算规则有了明确的了解。尤其是有关全举验证的记录，显示出古代占筮家把握揲算数学正确性的一种途径，为后人的相关研究提供了重要的材料。

（4）第四阶段

南宋淳祐七年，即公元1247年，数学家秦九韶作《数书九章》。该书共录算题9类81题，其中第一类为“大衍”，第一题为“蓍卦发微”。秦氏在该书的序中说：

> 独大衍法不载九章，未有能推之者，可不求其故哉？

是说汉代成书的《九章算术》中没有介绍和讨论称为“大衍法”的揲算，也从来没有人能推演出揲算的一般性算法，他有心讨论这个问题。秦氏在大衍类中提出了著名的“大衍求一术”。这是一种求解形如 $aX\equiv1\pmod b$ 的一次同余方程组的一般性算法，秦氏认为可以用它来解读揲算，称：

> 圣有大衍，微寓于《易》。奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐知原。

但是秦氏所衍与孔、朱疏注均不相同，他的做法是：

> 凡揲蓍求一爻之数，欲得一、二、三、四。出于无为，必令揲者不得知。故以四十九蓍，分之为二。只用左手之数，假令左手分得三十三，自一一揲之，必奇一，故不繁揲，乃径挂一。故《易》曰：“分而为二以象两，挂一以象三。”次后，又令筮人以二二揲之，其三十三，亦奇一，故归奇于扐。又令之以三三揲之，其三十三必奇三，故又归奇于扐。又令之以四四揲之，又奇一，亦归奇于扐。与前挂一，并三度揲，通有四扐，乃得一、一、三、一。……术意：谓揲二、揲三、揲四者，凡三度，复以三十三从头数揲之，故曰：“三变而成爻。”既卦有六爻，必一十八变，故曰：“十有八变而成卦。”

在这里，传世揲算中的“揲之以四”被改为4种揲策方式，而且是只对左手分得的一堆蓍策做揲1、揲2、揲3和揲4，并对奇余之策归扐。单从这种对传世揲法规则的改动，不用说与之相关的其他算法过程，就已能判断秦氏算法不再是《易》占算法。从占筮术的角度看，秦氏实际上是发明了另外一种可供《易》占起卦的算法。不过当时及后来的占筮家们并没有采用秦氏的算法求占。至于秦氏这样做的目的，可能并不在于依托《周易》来推介他的“大衍求一术”，而在于他“愿进之于道”（语见《数书九章·序》），即他有为《周易》揲算建立一般性算法的数学追求或意愿。这个阶段的主要特点是用传统数学方法建立一般性的揲算规则。虽然进行这方面的尝试仅秦九韶一

人，而且并不成功，但从揲算研究来说，却是一个重要阶段的代表。

（5）**第五阶段**

用现代数学的相关理论和方法研究揲算的特殊性命题和一般性命题，是这一阶段的主要特征。笔者所知有限，仅以下述诸例作为说明：

1984 年，侨居比利时的华裔学者沈宜甲先生作《科学无玄的周易》一书，提及他“于一九三七年曾见《中国科学》杂志载有一文，系以近代之高次方程式代数学方法注释易经”。[4]但未介绍具体内容，不知是对特殊命题还是对一般命题提出的数学研讨见解。沈先生本人则在该书的序言中说：

> 根据古人原理，我已觅出代数公式数十，周期律数百，表格一百余个，计算万千。

他对揲算命题做了许多分析讨论，并从一般性命题的角度，给出了一些“易经之数理基本公式”。[5]不过，在这些基本公式中，对于一般性的揲算命题，沈先生并没有得到完整准确的数学描述，故本书略而未引。

1987 年，罗见今先生在《数书九章与周易》一文中介绍了用同余符号表出的揲算特例和根据同余理论推得的“分揲定理”。[6]罗先生的研究成果于 1998 年载入吴文俊先生主编的《中国数学史大系・第一卷》，现将相关内容引述如下：

> 第一变有必要详加分析。借用数学上的同余符号“≡”来表示，揲法是以 4 为模余数为 1，2，3，4（注意不包括零而包括 4）的运算，下面标明“$\dot{\equiv}$”以示区别：$R \dot{\equiv} r \pmod 4$，$0 < r \leqslant 4$。

大衍之数五十，其用四十有九	$50-1=49=R$
分而为二，（以象两）	$R=R_1+R_2$
挂一（以象三）	$(R_1-1)+R_2=48$
揲之以四，（以象四时）	
	$R_1-1 \dot{\equiv} r_1 \pmod 4$
	$R_2 \dot{\equiv} r_2 \pmod 4$
归奇于扐，（以象闰）	$r_1+r_2=4$ 或 8
	$1+r_1+r_2=5$ 或 9

> 通过以上步骤能否保证“初一揲不五则九”？即第一变后所余蓍数 40 或 44 均为 4 的倍数是否必然的？经分析可知，这一结果在数学上是确定的。
>
> 引理：若 $a \equiv b, a_1 \equiv b_1 \pmod m$，则 $a \pm a_1 \equiv b \pm b_1 \pmod m$。

分揲定理：已知 $R = R_1 + R_2 \quad (R, R_1, R_2 \in \mathbb{N})$，若 $R \equiv r(\bmod m)$，$R_1 \equiv r_1(\bmod m)$，$R_2 \equiv r_2(\bmod m)$，则

$$r_1 + r_2 = \begin{cases} r \text{ 或 } m + r & (r \neq 0) \\ r \text{ 或 } m & (r = 0) \end{cases}$$

证明：将 $R_1 \equiv r_1(\bmod m)$ 和 $R_2 \equiv r_2(\bmod m)$ 相加，由引理，$R = R_1 + R_2 \equiv r_1 + r_2(\bmod m)$。

已知 $R \equiv r(\bmod m)$，与上式相减，由引理知 $r_1 + r_2 \equiv r\ (\bmod m)$。

亦即 $r_1 + r_2 = km + r \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$。

由于 $0 \leqslant r_1 < m$，$0 \leqslant r_2 < m$，即有 $0 \leqslant r_1 + r_2 < 2m$，

由此 $\qquad k = 0$ 或 1。

当 $0 < r < m$ 时，$r_1 + r_2 = r$ 或 $m + r$，

当 $r = 0$ 时，$r_1 + r_2 = r$ 或 m。证完。

具体到揲法的规定 $0 < r, r_1, r_2 \leqslant m$，可知

$$0 < r_1 + r_2 \leqslant 2m,$$

同样有 $\qquad k = 0$ 或 1。

当 $0 < r < m$ 时，$r_1 + r_2 = r$ 或 $m + r$，

当 $r = m$ 时，$r_1 + r_2 = m$ 或 $2m$。

据分揲定理，$48 \doteq 4(\bmod 4)$，这里 $r = m = 4$，故必有 $r_1 + r_2 = 4$ 或 8，$1 + r_1 + r_2 = 5$ 或 9，没有疑问了。

(6) 第二变揲法仿上(2)～(5)，用蓍 40 或 44 根：

$40 = R_1 + R_2$	$44 = R_1 + R_2$
$(R_1 - 1) + R_2 = 39$	$(R_1 - 1) + R_2 = 43$
$R_1 - 1 \equiv r_1(\bmod 4)$	$R_1 - 1 \equiv r_1(\bmod 4)$
$R_2 \equiv r_2(\bmod 4)$	$R_2 \equiv r_2(\bmod 4)$
$r_1 + r_2 = 3$ 或 7	$r_1 + r_2 = 3$ 或 7
$1 + r_1 + r_2 = 4$ 或 8	$1 + r_1 + r_2 = 4$ 或 8

此即所谓“第二揲，不四则八，是二变也”。据分揲定理，$39 \equiv 3\ (\bmod 4)$，$43 \equiv 3\ (\bmod 4)$，两者都有 $r_1 + r_2 = 3$ 或 7，故 $1 + r_1 + r_2 = 4$ 或 8，为不易之数……

除了试图用同余理论解读《周易》揲算这一特殊性命题之外，罗先生还指出：

由于必须算出九、六、七、八四数，在揲法程序的规定下，入算的数 R 在正整数中必有一确定的范围。可以证明，它应满足 $R - 1 = 4k + r \quad (k = 11,$

$r=1,2,3,4$)，亦即 R 只能是 46、47、48、49 四数之一。[7]

这个结论已涉及一般性的揲算命题，但显然并不完备。比如 k 和 r 在取其他数值时会出现怎样的结果就没有相关的界定。而且这个结论本身肯定也有问题，尽管罗先生声称“可以证明”，但笔者尚不知道罗先生何以证明 46 这个数用于揲算时，保证能够得到 6、7、8、9 四种可能出现的结果数。因为用 46 策时，揲得的结果数只有 6、7、8 三种可能，永远得不出 9。为什么会这样，本来应是“分揲定理”讨论的内容，但我们将发现“分揲定理”不适用于一般性的揲算。这个论断的正确性不妨效仿古人的做法，用全举法便能予以验证。

用全举法进行验证的关键在于第 1 次变易时，扐策数只有 6 策一种结果。表 3－1 给出了一部分全举计算的内容。由于表 3－1 中的规律是一目了然的，故没有必要列出所有可能出现的情况。而 49 策的情形，第 1 次变易时，扐策数有 5 策和 9 策两种可能的结果（参看本章 3.1.2 节）。此外，对于 48 策有扐策数不 4 则 8，对于 47 策则有扐策数不 3 则 7，也都有两种可能出现的结果。

表 3－1　对 46 策做分 2 挂 1 揲 4 时的扐策数分析（局部）

分堆策数	Ⅰ堆策数	1	2	3	4	5	6	7	8	…
	Ⅱ堆策数	45	44	43	42	41	40	39	38	…
从Ⅰ堆挂 1	挂策数		1	1	1	1	1	1	1	…
	Ⅰ堆余策数		1	2	3	4	1	2	3	…
	Ⅱ堆余策数		4	3	2	1	4	3	2	…
	扐策数		6	6	6	6	6	6	6	…
从Ⅱ堆挂 1	挂策数	1	1	1	1	1	1	1	1	…
	Ⅰ堆余策数	1	2	3	4	1	2	3	4	…
	Ⅱ堆余策数	4	3	2	1	4	3	2	1	…
	扐策数	6	6	6	6	6	6	6	6	…

显然，表 3－1 中的分析与下面的说法是等价的：对 46 策做分 2 挂 1 揲 4 时，归扐策数一共只有以下四种可能的情形：

①挂 1，一堆余 1，另一堆必余 4，共归扐 6 策；

②挂 1，一堆余 2，另一堆必余 3，共归扐 6 策；

③挂 1，一堆余 3，另一堆必余 2，共归扐 6 策；

④挂 1，一堆余 4，另一堆必余 1，共归扐 6 策。

其结果同样表明，对于 46 策，分 2 时不管怎么分，挂 1 揲 4 后的扐策数都等于 6 策，不可能得到其他策数。继续做下去，在完成第 2 次和第 3 次变易之后，得到的结果只能是 6、7、8 三数中的某一个数，而得不到数 9。本书第 4 章 4.2.1 节中给出了这种情况下完整的揲算过程，可供参考。

根据罗先生给出的“分揲定理”，对于 46 策，挂出 1 策后，将有 45 策进入分揲。取模数 $m=4$，可知 $45\equiv1\pmod 4$，即 $r=1$。因而 $r_1+r_2=r=1$，或 $r_1+r_2=r+m=$

$1+4=5$。加上挂出的 1 策，归扐策数的确有 2 策或 6 策两种可能的情形。

但是，对于 $45 \doteq 1 \pmod 4$，根据前述的全举分析，只能得到 $r_1+r_2=5$，相当于只存在 $r_1+r_2=r+m$ 一种结果，加上挂出的 1 策，归扐策数便只有 6 策一种情形。这样，进入第二次变易的策数便只有 $46-6=40$ 一种可能，不会出现 $46-2=44$ 的情况。三次变易完成后，结果数中也就不会出现 9 这个数了。可见，将同余理论用于一般性的揲算研究是有问题的。究其原因，应是在同余理论中，对于模数 m，余数 r_1、r_2 以及 r 须满足 $0\leqslant r_1<m$、$0\leqslant r_2<m$ 以及 $0\leqslant r<m$ 的条件，一般不适用于 $0<r_1\leqslant m$ 、$0<r_2\leqslant m$ 以及 $0<r\leqslant m$ 的情形。而在传世揲算中 $m=4$，余数 r_1、r_2 都只能是 1、2、3、4 四数之一，并非 0、1、2、3，此时是否可以使用同余理论应作仔细推敲，仅依靠引入符号“$\doteq$”是不够的。

总之，由于不能满足约束条件，不但不宜用同余理论解释作为特殊命题的揲算的数学正确性，而且在揲算规则下讨论一般性的分揲定理时，也不宜于采用同余理论。有鉴于此，本书对揲算的数学解读也就没有涉及同余理论。当然，怎样才能正确地将同余理论用于一般性揲算命题的数学解读，也是一个可以讨论的问题。

尽管如此，罗先生与沈先生一样，在用现代数学方法研究一般性的揲算命题方面进行了有益的探索，为本书的研究提供了一些经验。

可以说，2700 多年以来，揲扐算法作为成卦依据一直被用于《周易》占筮术。作为特殊命题，古代占筮家们采用全举法对其正确性作出了验证，可知这是一种没有数学瑕疵的成卦算法。但是关于这种算法的一般性命题的研究还进展有限，不论是用中国古代的传统数学方法，还是用现代数学理论，至今都还没有取得令人满意的成果。以传世揲算为算例的揲扐算法一般性命题，已成为华夏祖先留待后人归纳和解读的最为古老的初等数论命题之一。对这一命题的探讨，是本书的核心内容。

关于《易》占揲算结果数出现概率的计算，属于古典概率的内容，只要弄清揲算规则和影响因素即可求出，并无数学上的困难。但是系统地讨论揲算中的概率计算的文献资料却不多见。本书通过理论计算建立的概率指标，也许能为一些相关的考古课题提供参考。

至于对传世揲算定型过程的探讨，以及对这种算法的数学特征进行较为深入的归纳分析等方面的工作，在笔者见到的文献中基本未被涉及，因而本书在这些方面所作的讨论，尚属尝试。

参考文献：

[1] 彭涵梅．大衍之数五十初探．见：刘大钧主编．大易集说．成都：巴蜀书社，2003．120～130

[2] 宝鸡市博物馆，千阳县文化馆，中国科学院自然科学史研究所．千阳县西汉墓中出土算筹．考古．1976（2），85

[3] 朱伯崑．周易知识通览．济南：齐鲁书社，1993．6

[4] 沈宜甲．科学无玄的周易．北京：中国友谊出版公司，1984．1

[5] 沈宜甲．科学无玄的周易．北京：中国友谊出版公司，1984．160
[6] 罗见今．数书九章与周易．见：吴文俊主编．秦九韶与数书九章．北京：北京师范大学出版社，1987．93～96
[7] 吴文俊．中国数学史大系·第一卷．北京：北京师范大学出版社，1998．202～207

第 4 章　揲算命题的归纳和证明

> 独大衍法不载九章，未有能推之者，可不求其故哉？
>
> ——秦九韶《数书九章》

> 此项研究，一面须用近代数学方法，一面须置身于三千年前，方可持平。
>
> ——沈宜甲《科学无玄的周易》

本章的内容，是用现代数学方法，严格地按《易》占揲算的操作模式归纳建立一般性的揲算命题，并证明其为真。在本章相关命题的证明中将使用数学归纳法原理的一元、二元和三元形式，为此，有必要先做一些相关的准备工作。

4.1　一元、二元和三元数学归纳法的基本形式

在一个命题中，只对一个独立的正整数 A 使用数学归纳法原理作出证明时，可以将该命题记为 $P(A)$。在一个命题中，对两个独立的正整数 A 和 B 使用数学归纳法原理作出证明时，可以将该命题记为 $P(A,B)$。在一个命题中对三个独立的正整数 A、B 和 C 使用数学归纳法原理作出证明时，可以将该命题记为 $P(A,B,C)$。这三种情形可以分别称为数学归纳法原理的一元、二元和三元形式。

(1) **一元形式**

对命题 $P(A)$，用数学归纳法原理进行推证的基本过程为：

① 验证：$P(1)$ 成立。

② 假定：$P(a)$ 成立。

若：$P(a+1)$ 成立；

则：$P(A)$ 成立。[注1]

(2) **二元形式**

对命题 $P(A,B)$，用数学归纳法原理进行推证的基本过程为：

① 验证：$P(1,1)$ 成立。

② 假定：$P(a,1)$ 成立。

若：$P(a+1,1)$ 成立；

则：$P(A,1)$ 成立。

③ 假定：$P(A,b)$ 成立。

若：$P(A,b+1)$ 成立；

则：$P(A,B)$ 成立。[注2]

(3) **三元形式**

对命题 $P(A,B,C)$，用数学归纳法原理进行推证的基本过程为：

① 验证：$P(1,1,1)$ 成立。

② 假定：$P(a,1,1)$ 成立。

若：$P(a+1,1,1)$ 成立；

则：$P(A,1,1)$ 成立。

③ 假定：$P(A,b,1)$ 成立。

若：$P(A,b+1,1)$ 成立；

则：$P(A,B,1)$ 成立。

④ 假定：$P(A,B,c)$ 成立。

若：$P(A,B,c+1)$ 成立；

则：$P(A,B,C)$ 成立。

(4) **数学归纳法原理的一种变化形式**

当某一命题中归纳推证的对象是从某个大于 1 的整数开始的所有正整数时，使用数学归纳法原理进行推证时，可将验证环节中这个独立正整数的取值由 1 改为符合取值要求的最小的那个正整数，而其余环节不变。数学归纳法的这种变化形式将用于后述相关命题的归纳推证。届时，揲策数的最小值为 $M=2$，或 $M=3$ 。

4.2　不挂一的揲扐计算（局部）

在“分二”、“挂一”、“揲四”、“归扐”、“四营成易”、“三变成爻”、“十八变成卦”的算法设计中，若单纯从数学的角度观察，不难发现“挂一”是一个附加的环节。这就提示我们，在归纳建立一般性揲算命题的时候，可以先考虑不“挂一”的情形，从而使相关的讨论得以从较为简单的情形着手。在建立了相对简化的命题形式后，再加入“挂一”环节，即可使经过调整后的命题内容符合传世揲算的规则。此外，为了使揲算理论显得较为完整，本章将对不“挂一”的情形进行一些讨论。

4.2.1 对几种参揲策数的全举法试算

为了找到一般性揲算命题的具体形式，不妨参考沈宜甲先生在《科学无玄的周易》一书中归结出的周期性特点[1]，并根据《易》占揲算所用的 49 策这个参揲策数，选取 46、47、48、49 这几种策数做一些试算。注意到“挂一”环节对归纳揲算中最基本的数学关系有一些干扰，而且明显地是一种附加的环节设置，因而可以考虑分别对不“挂一”和有“挂一”两种情形都进行试算。所有试算都按“分 2、揲 4、归扐、3 次变易”的程序操作，对各个步骤都用全举法思路进行分析。所有可能出现的情形的计算过程则按枝形关系写出，这样比较简洁。当然，这是一种将操作型揲算改变为笔算型揲算的做法。虽然笔算型揲算不能用于占筮，但却有利于进行数学上的讨论。

(1) 对 46 策进行的试算

①不挂 1：在第 1 次变易中，全举分析表明，扐策数不 2 则 6；在第 2、3 次变易中，扐策数均不 4 则 8，故有：

$$
46\begin{cases}46-6=40\begin{cases}40-8=32\\40-4=36\end{cases}\\46-2=44\begin{cases}44-8=36\\44-4=40\end{cases}\end{cases}
\qquad
\begin{cases}32-8=24\\32-4=28\end{cases}\quad\begin{cases}36-8=28\\36-4=32\end{cases}\quad\begin{cases}40-8=32\\40-4=36\end{cases}
\qquad
\begin{array}{l}24\div4=6\\28\div4=7\\32\div4=8\\36\div4=9\end{array}
$$

⋮　　⋮　　⋮　　⋮

第 1 次变易　第 2 次变易　第 3 次变易　结果数为 6、7、8、9

②有挂 1：全举分析表明，在第 1 次变易中，扐策数为 6（参见表 3－1）；在第 2、3 次变易中，扐策数均不 4 则 8，故有：

$$
46-6=40\begin{cases}40-8=32\begin{cases}32-8=24\\32-4=28\end{cases}\\40-4=36\begin{cases}36-8=28\\36-4=32\end{cases}\end{cases}
\qquad
\begin{array}{l}24\div4=6\\28\div4=7\\32\div4=8\end{array}
$$

⋮　　⋮　　⋮　　⋮

1 变　2 变　3 变　结果数为 6、7、8

这个结果表明：46 策在不挂 1 的条件下可以用于《易》占成卦，而在有挂 1 的条件下，由于只能得到 6、7、8 三种结果数，因而不能用于《易》占。

(2) 对 47 策和 48 策进行的试算

类似地，对 47 策和 48 策做试算，计算过程同样可以用枝形关系表示。

①对于 47 策，全举分析表明，无挂 1 和有挂 1 的枝形关系都是相同的：

$$47\begin{cases}47-7=40\\47-3=44\end{cases}\begin{cases}32\begin{cases}24\\28\end{cases}\\36\begin{cases}28\\32\end{cases}\\40\begin{cases}32\\36\end{cases}\end{cases}\quad\text{结果数为 6、7、8、9}$$

②对于 48 策，无挂 1 和有挂 1 的枝形关系也都是相同的。与使用 47 策时相比，不同之处是第 1 次变易中归扐策数由不 3 则 7 变成了不 4 则 8：

$$48\begin{cases}48-8=40\\48-4=44\end{cases}\begin{cases}32\begin{cases}24\\28\end{cases}\\36\begin{cases}28\\32\end{cases}\\40\begin{cases}32\\36\end{cases}\end{cases}\quad\text{结果数为 6、7、8、9}$$

（3）对 49 策进行的试算

对于 49 策，无挂 1 和有挂 1 的计算结果并不相同：

①不挂 1 的情形：由于第一次变易中得到的扐策数只有 5 一种情形，计算过程可用枝形关系表示为：

$$49-5=44\begin{cases}36\begin{cases}28\\32\end{cases}\\40\begin{cases}32\\36\end{cases}\end{cases}\quad\text{结果数为 7、8、9}$$

②有挂 1 的情形：此时，第一次变易中的扐策数有 5 和 9 两种可能，故计算过程的枝形关系为：

$$49\begin{cases}49-9=40\\49-5=44\end{cases}\begin{cases}32\begin{cases}24\\28\end{cases}\\36\begin{cases}28\\32\end{cases}\\40\begin{cases}32\\36\end{cases}\end{cases}\quad\text{结果数为 6、7、8、9}$$

上述试算的结果是 47、48 两种策数挂 1 或不挂 1 均可用于《易》占成卦，而 49 策时必须挂 1 才能使用（若不挂 1，结果数为 7、8、9，由于不会出现结果数 6，因而不能用于《易》占成卦）。显然，47 和 48 这两种策数可以帮助我们绕开挂 1 环节，找寻一条建立一般性揲算命题的途径。但从便于建立函数关系的角度考虑，注意到 48 策可以被揲策数 4 整除，显示出选用 48 策比选用 47 策方便，因而后面的讨论没有选用 47 策。由于没有考虑参揲策数特有的周期性特点和挂 1 要求，因而本节的讨论具有局部性，完整情形见本章 4.3 和 4.4 节。

为了便于讨论，本书约定：参揲策数记为 T；一轮揲算所经过的变易次数记为 C；

各次变易中统一采用的揲策数(它同时也是计算结果数时使用的除数)记为 M;每一轮揲算完成后可能得到的若干个结果数称为一个结果数组,后面将证明,结果数组可以记为 $\{R, R+1, \cdots, R+C\}$ 的形式;在《易》占操作筹策进行计算的条件下,T、C、M、R 均为正整数。

具体的研究将分为"扐策定理"和"揲扐计算定理"两个部分。其中揲扐计算定理有几种不同的形式,它们分别是对诸如无挂 1 和有挂 1 等若干不同条件下的一般性揲算命题的具体表述,而在证明这些揲扐计算定理的正确性的过程中,需要用到对应条件下确定各次变易的归扐策数(包括挂出的 1 策)的扐策定理。

4.2.2 不挂一的扐策定理(局部)

定理 1:当 $T = aM$ 策时,分 2 揲 M 后的扐策总数 $L = 2M$ 或 M。其中 $a \geqslant 3, M \geqslant 2$。

式中 L 有 $2M$ 或 M 两种取值,出现哪一种取决于分 2 的具体情况,具有随机性。

正整数 $a \neq 1$ 或 $a \neq 2$ 的原因是:$a = 1$ 时,揲策总数必为零;$a = 2$ 时,揲策总数可能为零(另一种情况是可能为 M)。在《周易》占筮术的操作型计算中,只要出现揲策总数为零的情形,结果数等于 $0 \div M = 0$,便没有揲算意义。

$M \neq 1$ 的原因是:当 $M = 1$ 时,分 2 揲 1 的扐策总数恒等于 2,不可能出现扐策数为 1 的情形,故 $M = 1$ 时,虽然可做揲算,但定理 1 并不成立。具体分析如下:

当 $M = 1$ 时,若 $L = 2M$ 或 M,就有 $L = 2$ 或 1 的结果。

对于 $L = l_1 + l_2 = 2$,由于 l_1 和 l_2 都是正整数,可知 $l_1 = l_2 = 1$。对于 $L = l_1 + l_2 = 1$,由于 l_1 和 l_2 都是正整数,可知此式不能成立。或者说,l_1 和 l_2 中必有一个为 0,而这与揲算规则中 l_1 和 l_2 均不能为 0 的要求不符。

所以,当 $M = 1$ 时,只有 $L = 2$ 一种结果,定理 1 不能成立。下面是对定理 1 的证明:

证明:将参揲策数 T 分 2,可表为 $T = T_1 + T_2$。其中 $0 < T_1 < T$, $0 < T_2 < T$。

对 T_1 和 T_2 分别"揲 M"可表为 $T_1 = l_1 + pM$, $T_2 = l_2 + qM$。

因而 $T = T_1 + T_2 = l_1 + l_2 + (p+q)M$。其中 $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$,但不能同时为 0。

显然,扐策总数 $L = l_1 + l_2$。

按揲算规则,T_1 和 T_2 的揲后余策 l_1 和 l_2 必须满足

$0 < l_1 \leqslant M$ 和 $0 < l_2 \leqslant M$ 的要求,

故 $$0 < l_1 + l_2 \leqslant 2M \tag{A-1}$$

由于 $T = aM$,可知 M 能整除 T,记为 $M \mid T$,因而 $M \mid [l_1 + l_2 + (p+q)M]$,

故 $$M \mid (l_1 + l_2) \tag{A-2}$$

(A-1) 和 (A-2) 的解为 $l_1 + l_2 = 2M$ 或 M。

即扐策总数 $L = 2M$ 或 M。

证毕。

4.2.3　不挂一的揲扐计算定理（局部）

(1) 引理 1 的建立

按全举法完成的实算表明，$T=48$、$M=4$、$C=3$ 时，不挂 1 揲算得到的结果数组为 $\{6,7,8,9\}$，且三次变易中均有 $L=8$ 或 4，符合定理 1 的结论。揲算过程可以用枝形关系表示如下：

$$
48\begin{cases}48-8=40\begin{cases}40-8=32\\ 40-4=36\end{cases}\\ 48-4=44\begin{cases}44-8=36\\ 44-4=40\end{cases}\end{cases}
\qquad
\begin{matrix}\begin{cases}32-8=24\\ 32-4=28\end{cases}\\ \begin{cases}36-8=28\\ 36-4=32\end{cases}\\ \begin{cases}40-8=32\\ 40-4=36\end{cases}\end{matrix}
\qquad
\begin{matrix}24\div4=6\\ 28\div4=7\\ 32\div4=8\\ 36\div4=9\end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix}\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \text{第 1 次变易} & \text{第 2 次变易} & \text{第 3 次变易},(C=3) & \{6,7,8,9\},(R=6)\end{matrix}
$$

在此基础上，可逐步建立函数关系 $T=f(M,R,C)$。

首先，取 $C=3$，$R=6$，可构造 $T=f(M)=12M$，并得到引理 1。

引理 1：$T=12M$、$C=3$ **时，分 2 揲** M **的结果数组为** $\{6,7,8,9\}$。**其中，**$M\geqslant2$。

证明：对 M 使用数学归纳法。此时的命题形式为 $P(M)$，为一元形式。

① 验证：$P(2)$ 成立。

此时，$M=2$，有：$T=12M=24$。

根据定理 1，在 3 次变易中，均有扐策总数 $L=4$ 或 2 两种可能出现的情形，揲算过程可以用枝形关系表示为：

$$
24\begin{cases}20\begin{cases}16\\ 18\end{cases}\\ 22\begin{cases}18\\ 20\end{cases}\end{cases}
\qquad
\begin{matrix}16\begin{cases}12\\ 14\end{cases}\\ 18\begin{cases}14\\ 16\end{cases}\\ 20\begin{cases}16\\ 18\end{cases}\end{matrix}
\qquad
\begin{matrix}12\div2=6\\ 14\div2=7\\ 16\div2=8\\ 18\div2=9\end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix}\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \text{1 变} & \text{2 变} & \text{3 变},(C=3) & \{6,7,8,9\},(R=6)\end{matrix}
$$

结果数组的确为 $\{6,7,8,9\}$，故命题 $P(2)$ 成立。

② 假设：$M=m$ 时，命题 $P(m)$ 成立。

对于 $M=m+1$，命题形式为 $P(m+1)$，有：

$T=12M=12(m+1)$。

根据定理 1，在 3 次变易中，均有扐策总数 $L=2(m+1)$ 或 $(m+1)$，揲算过程的枝形

关系为：

$$\begin{array}{lllll}
 & & 8(m+1)\{ & 6(m+1) & 6(m+1)\div(m+1)=6\\
 & 10(m+1)\{ & & 7(m+1) & 7(m+1)\div(m+1)=7\\
12(m+1)\{ & & 9(m+1)\{ & & \\
 & 11(m+1)\{ & & 8(m+1) & 8(m+1)\div(m+1)=8\\
 & & 10(m+1)\{ & 9(m+1) & 9(m+1)\div(m+1)=9\\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \{6,7,8,9\},(R=6)
\end{array}$$

结果数组确为$\{6,7,8,9\}$，可知命题 $P(m+1)$ 成立。

故引理 1 成立。

证毕。

(2) **引理 2 的建立**

利用引理 1，取 $C=3$，可构造 $T=f(M,R)=(R+6)M$，并得到引理 2。

引理 2：$T=(R+6)M$、$C=3$ 时，对 T 分 2 揲 M 的结果数组为 $\{R, R+1, R+2, R+3\}$。其中 $M\geqslant 2$。

证明：将引理 2 记为命题 $P(M,R)$，对独立正整数 M 和 R 的二元形式的归纳法证明过程为：

① 验证：$P(2,1)$ 成立。

此时，$M=2$、$R=1$，因而 $T=(R+6)M=(1+6)\times 2=14$。

根据定理 1，在 3 次变易中均有扐策数 $L=4$ 或 2。揲算过程的枝形关系为：

$$\begin{array}{lllll}
 & & 6\{ & 2 & 2\div 2=1\\
 & 10\{ & & 4 & 4\div 2=2\\
14\{ & & 8\{ & & \\
 & 12\{ & & 6 & 6\div 2=3\\
 & & 10\{ & 8 & 8\div 2=4\\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \{1,2,3,4\},(R=1)
\end{array}$$

所得结果数组的确是$\{1,2,3,4\}$，故命题 $P(2,1)$ 成立。

② 假定：$P(m,1)$ 成立。

对于 $P(m+1,1)$，有：$T=(R+6)M=7M=7(m+1)$。

根据定理 1，在 3 次变易中均有扐策总数 $L=2(m+1)$ 或$(m+1)$ 两种可能出现的情形，因而揲算过程的枝形关系为：

$$
\begin{array}{lllll}
 & & 3(m+1)\{ & (m+1) & (m+1)\div(m+1)=1 \\
 & 5(m+1)\{ & & 2(m+1) & 2(m+1)\div(m+1)=2 \\
7(m+1)\{ & & 4(m+1)\{ & & \\
 & 6(m+1)\{ & & 3(m+1) & 3(m+1)\div(m+1)=3 \\
 & & 5(m+1)\{ & 4(m+1) & 4(m+1)\div(m+1)=4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \{1,2,3,4\},(R=1)
\end{array}
$$

所得结果数组确为{ 1, 2, 3, 4},可知命题 $P(m+1,1)$ 成立。

故命题 $P(M,1)$ 成立。

③ 假定:$P(M,r)$ 成立。

对于 $P(M,r+1)$,有:

$T=(R+6)M=(r+1+6)M=(r+7)M$。

根据定理 1,在 3 次变易中均有扐策数 $L=2M$ 或 M 两种可能出现的情形,因而揲算过程的枝形关系为:

$$
\begin{array}{lllll}
 & & (r+3)M\{ & (r+1)M & (r+1)M\div M=r+1=R \\
 & (r+5)M\{ & & (r+2)M & (r+2)M\div M=r+2=R+1 \\
(r+7)M\{ & & (r+4)M\{ & & \\
 & (r+6)M\{ & & (r+3)M & (r+3)M\div M=r+3=R+2 \\
 & & (r+5)M\{ & (r+4)M & (r+4)M\div M=r+4=R+3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \{r+1,\ r+2,\ r+3,\ r+4\}\text{或} \\
 & & & & \{R,\ R+1,\ R+2,\ R+3\},(R=r+1)
\end{array}
$$

所得结果数组确为{ $r+1$, $r+2$, $r+3$, $r+4$},可知命题 $P(M,r+1)$ 成立。

故命题 $P(M,R)$ 成立,即引理 2 成立。

证毕。

(3) 定理 2 的建立

利用引理 2,可构造 $T=f(M,R,C)=(R+2C)M$,并得到下述定理。

定理 2:$T=(R+2C)M$ 时,可以对 T 进行分 2 揲 M 的揲扐计算,经过 C 次变易后的结果数组为$\{R,R+1,\cdots,R+C\}$。其中,$M\geqslant 2$。

证明:对独立正整数 M、R 和 C 使用数学归纳法。

将定理 2 记为命题 $P(M,R,C)$,关于 M、R 和 C 的三元形式的归纳法证明过程为:

① 验证:$P(2,1,1)$ 成立。

此时,$M=2$、$R=1$、$C=1$,有:$T=(R+2C)M=(1+2\times 1)\times 2=6$。

根据定理 1,在这次变易中扐策数 $L=4$ 或 2,因而揲算过程的枝形关系为:

$$
\begin{array}{ll}
6\begin{cases}6-4=2\\6-2=4\end{cases} & \begin{array}{l}2\div 2=1\\4\div 2=2\end{array}\\
\quad\vdots & \quad\vdots\\
1\text{变},(C=1) & \{1,2\},(R=1)
\end{array}
$$

所得结果数组的确是$\{1,2\}$,故命题 $P(2,1,1)$ 成立。

② 假定:$P(m,1,1)$ 成立。

对于 $P(m+1,1,1)$ 有:

$T=(R+2C)M=(1+2\times 1)(m+1)=3(m+1)$。

根据定理1,在这次变易中扐策总数$L=2(m+1)$或$(m+1)$,有两种可能出现的情形,揲算过程的枝形关系为:

$$
\begin{array}{ll}
3(m+1)\begin{cases}(m+1)\\2(m+1)\end{cases} & \begin{array}{l}(m+1)\div(m+1)=1\\2(m+1)\div(m+1)=2\end{array}\\
\quad\vdots & \quad\vdots\\
1\text{变},(C=1) & \{1,2\},(R=1)
\end{array}
$$

所得结果数组的确是$\{1,2\}$,可知命题 $P(m+1,1,1)$ 成立。

故命题 $P(M,1,1)$ 成立。

③ 假定:$P(M,r,1)$ 成立。

对于 $P(M,r+1,1)$,有:

$T=(R+2C)M=(r+1+2\times 1)M=(r+3)M$。

根据定理1,在这次变易中扐策总数 $L=2M$ 或M,有两种可能出现的情形,揲算过程的枝形关系为:

$$
\begin{array}{ll}
(r+3)M\begin{cases}(r+1)M\\(r+2)M\end{cases} & \begin{array}{l}(r+1)M\div M=r+1\\(r+2)M\div M=r+2\end{array}\\
\quad\vdots & \quad\vdots\\
1\text{变},(C=1) & \{r+1,r+2\},(R=r+1)
\end{array}
$$

结果数组确为$\{r+1,r+2\}$,可知命题 $P(M,r+1,1)$ 成立。

故命题 $P(M,R,1)$ 成立。

④ 假定:$P(M,R,c)$ 成立。

对于 $P(M,R,c+1)$ 有:

$T=(R+2C)M=[R+2(c+1)]M$。

根据定理1,在$c+1$次变易中均有扐策总数$L=2M$或M,有两种可能出现的情形,揲算过程的枝形关系可表示为:

$$
\begin{array}{llll}
 & & & \left\{ T-2cM \begin{cases} T-(2c+2)M \\ T-(2c+1)M \end{cases} \right. \\
 & & T-6M\cdots & \\
 & T-4M & & \\
T\begin{cases} T-2M \\ T-M \end{cases} & \begin{cases} T-3M \\ T-2M \end{cases} & \begin{cases} T-5M\cdots \\ T-4M\cdots \end{cases} & \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\
 & & T-3M\cdots & \left\{ T-cM \begin{cases} T-(c+2)M \\ T-(c+1)M \end{cases} \right. \\
\vdots & \vdots & \vdots & \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\
1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变} & c\text{变} \quad c+1\text{变}\ ,(C=c+1)
\end{array}
$$

用 M 去除最后的揲策总数，得：

$[T-(2c+2)M]\div M=[R+2(c+1)-(2c+2)]M\div M=R$；

$[T-(2c+1)M]\div M=[R+2(c+1)-(2c+1)]M\div M=R+1$；

…

$[T-(c+2)M]\div M=[R+2(c+1)-(c+2)]M\div M=R+c$；

$[T-(c+1)M]\div M=[R+2(c+1)-(c+1)]M\div M=R+c+1$。

所得结果数组确为 $\{R,R+1,\cdots,R+c+1\}$，可知命题 $P(M,R,c+1)$ 成立。

故命题 $P(M,R,C)$ 成立，即定理 2 成立。

证毕。

4.3　有挂一的揲扐计算

设置“挂一”操作后，使揲扐计算的数学规律变得复杂一些，但可以在定理 1 和定理 2 的基础上推广得到相关的结果，从而对《周易》占筮模式下揲扐算法的一般性命题的具体形式做出一种归纳，并证明其为真命题。

4.3.1　有挂一的扐策定理

(1) 定理 3 的建立

定理 3：参揲总策数 $S=T+K=(R+2C)M+K$ 时，分 2 挂 1 揲 M 后，扐策总数 $L=2M+K$ 或 $M+K$。其中 $(3-M)\leqslant K\leqslant 1$；当 $C=1$ 时，$M\geqslant 2$；当 $C>1$ 时，$M\geqslant 3$；K 为整数，M、C、R 为正整数。

K 是调整策数，K 的取值须满足以 M 为周期的约束条件。

L 有两种可能的取值，缘于对 S 进行分 2 的随机性。

对任何 $C>0$，$M\neq 1$ 的原因是 $M=1$ 时，恒有 $L=3$，本定理不能成立。

$C>1$ 时，$M\neq 2$ 的原因是进入第 2 次变易后，若 $M=2$，则 $L=4$，由于不会出现第

二种数值，本定理亦不能成立。这个结论的正确性可以讨论如下：

本定理在第 1 次变易中成立，则进入第 2 次变易的参揲策数为

$S_1 = S - (2M + K) = (R + 2C)M + K - (2M + K) = (R + 2C - 2)M$，或者

$S_2 = S - (M + K) = (R + 2C)M + K - (M + K) = (R + 2C - 1)M$，

其中 S_1 和 S_2 必定都是 M 的整数倍，不妨记为 $S' = bM$。

这样，对 S' 实施分 2 挂 1 揲 M 的操作可写为 $bM = l_1 + pM + l_2 + qM + 1$，

其中 $p \geqslant 0$，$q \geqslant 0$，但不能同时为 0，且 $0 < l_1 \leqslant M$，$0 < l_2 \leqslant M$。

由于 $M \mid bM$，故 $M \mid (l_1 + l_2 + 1)$。

当 $M = 2$ 时，可得

$$0 < l_1 \leqslant 2,\ 0 < l_2 \leqslant 2 \qquad (B-1)$$

$$2 \mid (l_1 + l_2 + 1) \qquad (B-2)$$

(B－1) 和(B－2) 的解为 $l_1 = 1$ 时，$l_2 = 2$，或 $l_1 = 2$ 时，$l_2 = 1$。

于是扐策数 $L = l_1 + l_2 + 1 = \begin{cases} 1 + 2 + 1 = 4 \\ 2 + 1 + 1 = 4 \end{cases}$

事实上，$C > 1$ 时，进入第 2 次变易的参揲策数必然是 M 的整数倍，将它分成两堆时将有两堆策同为奇数或同为偶数两种情形。挂出 1 策以后，必然只有一堆策为奇数而另一堆策为偶数一种情形出现。如果 $M = 2$，按揲取规则，余策必然为 3 策，加上挂出的 1 策，故只有 $L = 4$ 一种结果，不会出现第二种数值。下面是对定理 3 的证明：

证明：对 K 使用数学归纳法。

分析：由 $(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$，可知：

$M = 2$ 时，$K = 1$；

$M = 3$ 时，$K = 0, 1$；

$M = 4$ 时，$K = -1, 0, 1$；

…

$M = m$ 时，$K = 3 - m, 4 - m, \cdots, 0, 1$。

即 K 的取值由 M 决定，故对 K 作数学归纳法推证时，必与 M 相关。

① 验证：对任意的 $M \geqslant 2$ 或 $M \geqslant 3$，取 $K = 1$ 时，$S = T + 1$。

从“分二”和“挂一”都具有随机性的规则来看，先分 2 后挂 1 和先挂 1 后分 2 在数学上是等价的。故分 2 挂 1 揲 M 的操作可表为挂 1 分 2 揲 M 的形态。即

$S - 1 = T = T_1 + T_2 = l_1 + l_2 + (p + q)M$。

其中 $T_1 = l_1 + pM$，$T_2 = l_2 + qM$。且 $0 < T_1 < T$，$0 < T_2 < T$。

由于 $p \geqslant 0$，$q \geqslant 0$，但不能同时为 0，且 $0 < l_1 \leqslant M$，$0 < l_2 \leqslant M$，

故 $0 < l_1 + l_2 \leqslant 2M$。 (C－1)

又因 $T = (R + 2C)M$，可知 M 能够整除 T，记为 $M \mid T$。

由 $T = l_1 + l_2 + (p + q)M$，可得

$M \mid (l_1 + l_2)$。 (C－2)

(C－1) 和(C－2) 的解为 $l_1 + l_2 = 2M$ 或 M。

有挂 1 时，扐策总数 L 中还应计入挂出的 1 策，于是 $L = l_1 + l_2 + 1 = 2M + 1$ 或 $M + 1$。

命题成立。

② 假设:$M = m$,取 $K = k = 3 - m$ 时,命题成立。

对于 $M = m + 1$,K 的相应取值为:$K = 3 - (m + 1) = 2 - m$。

此时,$S = T + K = T + (2 - m)$。

故挂 1 分 2 揲 M 的操作可表为:

$S - 1 = T + (2 - m) - 1 = T + 1 - m = T_1 + T_2 = l_1 + l_2 + (p + q)(m + 1)$。

可得 $T = T_1 + T_2 + (m - 1) = l_1 + l_2 + (m - 1) + (p + q)(m + 1)$。

其中 $T_1 = l_1 + p(m + 1)$, $T_2 = l_2 + q(m + 1)$,且 $0 < l_1 \leqslant (m + 1)$, $0 < l_2 \leqslant (m + 1)$,可得 $0 < l_1 + l_2 \leqslant 2(m + 1)$。

故 $0 < l_1 + l_2 + (m - 1) \leqslant 2(m + 1) + (m - 1)$。 (D－1)

又因 $T = (R + 2C)(m + 1)$,可知 $(m + 1) \mid T$,

故 $(m + 1) \mid (l_1 + l_2 + m - 1)$。 (D－2)

(D－1) 和(D－2) 的解为 $l_1 + l_2 + (m - 1) = 2(m + 1)$ 或$(m + 1)$,

即 $l_1 + l_2 = 2(m + 1) + (1 - m)$ 或$(m + 1) + (1 - m)$。

加上挂出的 1 策,得:

$L = l_1 + l_2 + 1 = 2(m + 1) + (2 - m)$ 或$(m + 1) + (2 - m)$。

即扐策总数 $L = 2M + K$ 或$M + K$。

故定理 3 成立。

证毕。

注意到当 $K = 0$ 时,本定理即转变为定理 1 的形式(但要求 $M \geqslant 3$),表明定理 1 既适用于有挂 1 的情形,也适用于不挂 1 的情形。

应当指出,在以 M 为周期的条件下,K 值的个数应有 M 个,(其中有一个是 0) 而在定理 3 的约束条件中,K 的取值只有 $M - 1$ 个,所缺的这个值可取为 $K = 2$(另一种可行的取法是 $K = 2 - M$)。这是因为 $K = 2$(或者 $K = 2 - M$) 时,定理 3 并不成立,相关情形须由定理 4 描述。

(2) 定理 4 的建立

> **定理 4:参揲总策数 $S = T + 2 = (R + 2C)M + 2$ 时,分 2 挂 1 揲 M 之后,扐策总数 $L = M + 2$。其中,$M \geqslant 1$。**

证明:对于 $S = T + 2$,分 2 挂 1 揲 M 的操作可表为:

$S - 1 = T + 1 = T_1 + T_2 = l_1 + l_2 + (p + q)M$ 。

其中 $T_1 = l_1 + pM$, $T_2 = l_2 + qM$,且 $0 < T_1 < T + 1$,$0 < T_2 < T + 1$,以及 $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$,但不能同时为 0。

由 $0 < l_1 \leqslant M$, $0 < l_2 \leqslant M$,可得 $0 < l_1 + l_2 \leqslant 2M$,

故 $0 < l_1 + l_2 - 1 < 2M$。 (E－1)

又因 $T = (R + 2C)M$，可知 M 能够整除 T，记为 $M \mid T$。

由 $T = T_1 + T_2 - 1 = l_1 + l_2 - 1 + (p + q)M$，

可得 $M \mid (l_1 + l_2 - 1)$。 (E－2)

(E－1) 和(E－2) 的解为 $l_1 + l_2 - 1 = M$，即 $l_1 + l_2 = M + 1$。

加上挂出的 1 策，得扐策总数 $L = l_1 + l_2 + 1 = M + 2$。

证毕。

显然，取 $K = 2 - M$ 时，有 $S = T + 2 - M = (R + 2C - 1)M + 2$，所得结论与定理 4 是等价的。

4.3.2 一般性揲算命题的归纳——有挂一的揲扐计算定理

定理 5：参揲总策数 $S = T + K = (R + 2C)M + K$ 时，可以按《周易》占筮的揲扐计算模式进行分 2 挂 1 揲 M 的计算，经过 C 次变易后的结果数组为：$\{R, R+1, \cdots, R+C\}$。其中，$(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$；$C = 1$ 时，$M \geqslant 2$；$C > 1$ 时，$M \geqslant 3$。

本定理可用证明定理 2 的类似方法予以证明，故从略。证明过程中，各次变易的扐策总数 L 应根据定理 3 确定，并注意到从第 2 次变易起，均有 $K = 0$。

定理 6：参揲策数 $S = T + 2 = (R + 2C)M + 2$ 时，可以按《周易》占筮的揲扐计算模式，进行分 2 挂 1 揲 M 的计算，经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R+1, R+2, \cdots, R+C\}$。其中，$C = 1$ 时，$M \geqslant 1$；$C > 1$ 时，$M \geqslant 3$。

本定理可用证明定理 2 的类似方法予以证明，故从略。证明过程中，第 1 次变易的扐策总数 L 应根据定理 4 确定，而此后各次变易的扐策总数 L 均应根据定理 3 确定，并注意到 $K = 0$。

定理 5 和定理 6 便是一般性揲算命题的一种具体形式。由此可知一般性揲算命题是存在的，但一般性揲算命题是否还有其他的具体形式，仍有待研究。

4.3.3 计算实例

实例 1：

《周易》占筮术中使用的揲算参数为：$S = 49$ 策、分 2、挂 1、$M = 4$、$C = 3$、$R = 6$。现在可以用定理 5 证明《周易》揲算方法的数学正确性。

由定理 5，参揲总策数为 $S = T + K$。其中，$T = (R + 2C)M = (6 + 2 \times 3) \times 4 = 48$ 策。由 $(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$ 给定的约束条件，可知 $M = 4$ 时，$K = -1, 0, 1$。表明参揲策数 S 取为 47、48 或 49 策时，均可用于分 2、挂 1、揲 4 的计算，经 3 次变易后，可能出现的结果数都是 6、7、8 或 9，因而这三种参揲策数都能满足揲算成卦的需要。在实际应用中，《周易》

筮法选定 49 策作为参揲策数，而没有选 47 策或 48 策。

古代占筮家用全举法对《易》占揲算的数学正确性进行了验证。现在，本书用现代数学的数学归纳法原理和演绎论证方法，通过一般性命题的建立，证明了《易》占揲算的确是一则特殊真命题。

实例 2：

西汉扬雄创制的《太玄》是模仿《周易》的卦占方法之一。其卦象由“——”、“– –”和“---”3 种爻符构成，4 爻成卦，因而共有 $3^4 = 81$ 种卦象。求取爻符的算法为：总策数为 33 策（即 $S = 33$），分 2 挂 1 揲 3（即 $M = 3$），两变成爻（即 $C = 2$），所得结果数组为 $\{7,8,9\}$（即 $R = 7$）。这三种可能的结果数正好对应于 3 种爻符。经 4 轮揲算共 8 次变易即可确定一个卦象。

不难验证 $T = (R + 2C)M = (7 + 2 \times 2) \times 3 = 33$ 策。

由约束条件 $(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$，当 $M = 3$ 时，可知 $K = 0$ 或 1。《太玄》取 $K = 0$，即 $S = T + K = 33$ 策，符合定理 5 的条件。

根据定理 3，在两次变易中均有扐策总数 $L = 6$ 或 3。

确定一个爻符的一轮揲算过程的枝形关系如下：

$$
\begin{array}{llll}
 & 27\left\{\begin{array}{l}21\\24\end{array}\right. & & \begin{array}{l}21 \div 3 = 7\\24 \div 3 = 8\end{array}\\
33\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right. & 30\left\{\begin{array}{l}24\\27\end{array}\right. & & 27 \div 3 = 9\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
1\text{变} & 2\text{变},(C = 2) & & \{7,8,9\},(R = 7)
\end{array}
$$

注意到《太玄》占筮术中使用的 $S = 33$ 策，由于 $K = 0$，同时也符合定理 2 的要求，因而可以用于不挂 1 的揲算。可见，《太玄》占筮术所用的起卦算法既可以挂 1，也可以不挂 1，不具备算法上的惟一性，显示出扬雄的起卦算法设计存在数学瑕疵。用全举法不难验证，若取 $K = 1$，也就是 $S = 34$ 策时，必须挂 1 才能实现《太玄》的起卦目的。由此可见，要想避免这一瑕疵并不困难，关键在于设计算法时是否想到了这方面的问题。扬雄毕竟不是数学家，他在设计算法时没有考虑这种算法上的惟一性要求是完全可能的。而在《周易》揲算的规则没计中却没有这样的瑕疵，如果这是有意为之，恰好体现了西周占筮家的高明之处。相关讨论可参看本书第 7 章的 7.2.5 节。

实例 3：

取 $M = 16$、$C = 4$、$R = 1$，得 $T = (1 + 2 \times 4) \times 16 = 144$ 策。若选取 $K = 3 - M = 3 - 16 = -13$，得 $S = T + K = 144 - 13 = 131$ 策。根据定理 5，可以对 131 策进行揲扐计算。

由定理 3，第 1 变中扐策总数 L 为 $(2M + K) = 32 - 13 = 19$ 策，或 $(M + K) = 16 - 13 = 3$ 策；由定理 3，第 2、3、4 诸变中因 $K = 0$，故可能出现的扐策总数 L 均为 $2M = 32$ 策，或 $M = 16$ 策。揲算过程的枝形关系如下 ：

			48{	16	$16 \div 16 = 1$
		80{			
	112{			32	$32 \div 16 = 2$
			64{		
131{				48	$48 \div 16 = 3$
		96{			
	128{		80{	64	$64 \div 16 = 4$
		112{	96{	80	$80 \div 16 = 5$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	1 变	2 变	3 变	4 变,$(C = 4)$	$\{1,2,3,4,5\}$,$(R = 1)$

4.4 对不挂一的揲扐算法的补充及揲扐计算的扩展形式

至此,关于传世揲算的一般性命题的归纳建立工作已经全部完成,但从数学的角度考虑,还可以做一些补充和讨论。

4.4.1 对不挂一揲算的补充内容

在本章第 4.2 节中建立的定理 1 和定理 2 分别是下述定理 7 和定理 9 的局部形式。当时只给出定理 1 和定理 2,而没有对不挂 1 的揲扐算法作较为完整的讨论,其原因主要是本书的目的在于归纳得出用定理 5 表出的《易》占揲算的一般命题,这样处理可以使问题的讨论有所集中。显然,在不挂 1 的条件下,存在类似于定理 3 ~ 6 的一套命题。为了使数学上显得比较完整,兹补充如下:

定理 7:参揲总策数 $S = aM + K$ 时,分 2 揲 M(不挂 1) 后的扐策总数 $L = 2M + K$ 或 $M + K$。其中 $(2 - M) \leqslant K \leqslant 0, a \geqslant 3, M \geqslant 2$。

当 $K = 0$ 时,本定理即转变为定理 1。

定理 8:参揲总策数 $S = aM + 1$ 时,分 2、揲 M(不挂 1) 后的扐策总数 $L = M + 1$。其中 $a \geqslant 2$, $M \geqslant 1$。

定理 9:参揲总策数 $S = (R + 2C)M + K$ 时,可以按《周易》占筮的揲扐计算模式进行分 2、揲 M(不挂 1) 的计算,经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R, R + 1, \cdots, R + C\}$。其中 $(2 - M) \leqslant K \leqslant 0$, $M \geqslant 2$。

当 $K = 0$ 时,本定理即转变为定理 2.

定理 10:参揲总策数 $S = (R + 2C)M + 1$ 时,可以按《周易》占筮的揲扐计算模式进行分 2、揲 M(不挂 1) 的计算,经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R + 1, R + 2, \cdots, R + C\}$。其中,$M \geqslant 2$。

上述定理的证明与定理 2 和定理 3 的证明方法类似,故不再赘述。

4.4.2　揲扐计算的扩展形式

如果将 R 和 T 的取值范围由正整数扩展为整数，即包含零和负整数，（根据揲算定义，M 和 C 的取值仍为正整数）即可超出《周易》手动操作型揲算的限制，将前文所建立的全部定理用于整数条件下的揲算。当然，这是用笔写的方式在纸上完成的揲算。由于不使用筹策算具，这时的“揲”和“扐”都表现为做减法，已无操作筹策的形态。而且，只有在找到了将随机性引入分 2 环节的条件下，这种类型的算法才能用于占筮。因为只有实现了随机地分 2，才能使每次揲算得以从若干个可能出现的结果数中随机地求出一个。可见，这种扩展形式的处理无非是给出了一种数学上的可能性。

实例 4：

取 $M=3$、$C=2$、$R=-1$、$K=1$ 时，

$T=(R+2C)M=(-1+2\times 2)\times 3=9$，

故 $S=T+K=9+1=10$。

根据定理 5，可以对此 S 值进行揲算。

根据定理 3，第 1 次变易中的扐策数不 4 则 7，而第 2 次变易中的扐策数不 3 则 6。揲算过程的枝形关系如下：

$$
\begin{array}{llll}
10\begin{cases} 10-7=3\begin{cases}3-6=-3\\3-3=0\end{cases} \\ \\ 10-4=6\begin{cases}6-6=0\\6-3=3\end{cases}\end{cases} & & & \begin{array}{l}-3\div 3=-1\\0\div 3=0\\3\div 3=1\end{array}\\
\quad\vdots & \vdots & & \vdots\\
\quad 1\text{变} & 2\text{变},(C=2) & & \{-1,0,1\},(R=-1)
\end{array}
$$

实例 5：

取 $C=2$、$R=-4$、$K=0$ 时，对任意的 $M\geqslant 3$，有：

$T=(R+2C)M=(-4+2\times 2)M=0$，

故 $S=T+K=0$。

根据定理 5，只要做到随机地分 2，就可以对此 S 值进行揲算。当然，对于 $S=0$，分成的两堆策都是 0 策，已谈不上随机分拆，可视为特殊情形。

根据定理 3，各次变易中均有 $L=2M$ 或 M 两种可能出现的情形。揲算过程的枝形关系如下：

$$
\begin{array}{lll}
0\begin{cases}-2M\begin{cases}-4M\\-3M\end{cases}\\-M\;\begin{cases}\\-2M\end{cases}\end{cases} & & \begin{array}{l}-4M\div M=-4\\-3M\div M=-3\\-2M\div M=-2\end{array}\\
\quad\vdots\quad\vdots & & \vdots\\
1\text{变}\quad 2\text{变},(C=2) & & \{-4,-3,-2\},(R=-4)
\end{array}
$$

实列 6：

取 $M=6$、$C=2$、$R=-5$、$K=1$ 时，

$T=(R+2C)M=(-5+2\times2)\times6=-6$；

则 $S=T+K=(R+2C)M+K=-6+1=-5$。

① 根据定理 10，只要能随机地分 2，对此 S 值可做不挂 1 的揲算如下：

由定理 8，第 1 次变易时有 $L=M+1=6+1=7$；

由定理 7，第 2 次变易时因对应的 K 值已为 0，故 $L=2M$ 或 M，即 $L=12$ 或 6。

揲算过程的枝形关系为：

$$\begin{array}{lll}
-5-7=-12\begin{cases}-12-12=-24\\-12-6=-18\end{cases} & & \begin{array}{l}-24\div6=-4\\-18\div6=-3\end{array}\\
\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots & & \quad\vdots\\
1\text{变} \qquad 2\text{变},(C=2) & & \{-4,-3\},(R=-5)
\end{array}$$

② 根据定理 5，只要能随机地分 2，对此 S 值可做有挂 1 的揲算如下：

由定理 3，第 1 次变易时有 $L=2M+K$ 或 $M+K$ 两种可能，即 $L=2\times6+1=13$，或者 $L=M+K=6+1=7$。第二次变易时因对应的 $K=0$，故 $L=2M$ 或 M，即 $L=12$ 或 6。揲算过程的枝形关系为：

$$\begin{array}{llll}
-5\begin{cases}-5-13=-18\\[6pt]-5-7=-12\end{cases} & \begin{array}{l}\begin{cases}-30\\-24\end{cases}\\ \begin{cases}\\-18\end{cases}\end{array} & \begin{array}{l}-30\div6=-5\\-24\div6=-4\\-18\div6=-3\end{array}\\
\qquad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots\\
\quad 1\text{变} & 2\text{变},(C=2) & \{-5,-4,-3\},(R=-5)
\end{array}$$

4.5 关于筮数算得方法的猜测

本书第 2 章 2.2.2 节介绍了出现于商周时期的筮数。从表 2－2 统计的情况来看，在 6 个筮数一组的占法中，所用数字以 1、5、6、7、8 为多，在讨论筮数的算得方法时当以它们为主。9 的出现只有 4 例，在总计 457 个筮数中所占比例不到 1%，就算得方法的猜测而言，似可暂不考虑。对于这些筮数中没有 2、3、4 三数的原因，一种解释是当时的算法可能有这几种结果数，只是在记录时因写法容易混淆而按奇偶做了归并，即奇数 3 写为 1，偶数 2、4 写为 6[2]，因而，若略去数字 9，实际算得的结果数中应包含了从 1 到 8 共 8 个整数（参看本书第 2 章 2.2.2 节）。另一种解释是记录这些筮数时采用的算法本身就不会得出 2、3、4 这几种结果数[3]（参看本书第 8 章 8.1.1 节）。此外，没有发现使用了 10 或大于 10 的其他整数作筮数的情形。当学者们相信这些数字串是当时的筮算记录，并称之为筮数之后，接下来的问题就是这些筮数是用什么方法算出来的。显然，在现有条件下，要想解答这个问题尚有一定的难度，不过，仍然

可以明确一些较为基本的依据。笔者认为，主要的思考依据有以下三点：

①由结果数反溯算法的研究思路。所有筮数都必有各自获取的方法，我们目前见到的只是作为计算结果的筮数，而要想知道的则是算出这些筮数的算法，所以我们的研究思路表现为从结果反溯算法。这样，可选算法必然会有各种各样的类型，具体算法就有可能更是多得数不胜数。显然，在目前的背景条件下，不论得出的算法规则是什么形态，都属于猜测。我们通过对不同算法方案的比较，则可将猜测的范围做适当的收缩。

②宜将殷商算法与西周算法分开讨论。这些筮数的出现地域以商、周王朝的势力范围为主，但时间跨度从殷商到西周却为时不短，尤其是商人的算法是否就直接传续于周人，仍有待考证。因而，很难认为已发现的这些筮数都是采用某种统一的算法求得，虽然也不排除在这些算法中有可能存在着使用时间较长，流传范围较广的某种主流算法，但将殷商与西周的算法分开来讨论，似乎较为合适。

③宜将算法模式限于揲算模式。除了《易传・系辞上》记载的揲算，迄今为止尚未发现有一定数学知识含量的秦以前的其他筮算方法。因而，对于与筮数相关的筮算方法的猜测似宜局限于揲算的模式，暂时还找不到较为充分的理由以引入其他算法模式。当然，这一考虑与确有可能存在着与揲算模式不同的其他算法模式的情形并不冲突。这就是说，在不同的算法模式被发现之前，反溯已知筮数的算得方法时，暂时还只宜于在揲算模式内考虑。这样，获取作为吉凶判据的奇偶结果的核心环节是筹策的分拆和揲扐操作，可供参考的各种算法的不同，主要表现在所用策数和一些局部揲算环节及相关参数的设计配置方面。

以此为基础，结合本章建立的定理 5 和定理 9，似可对获取商周筮数的具体算法试作相关的研究。不过，考虑到商代使用的算法还难于达到传世揲算模式这样高的算法设计水平，而且可供参考的资料又太少，使得目前还不具备讨论殷商筮算方法的条件，因而暂不讨论殷商筮数的算得方法，只对西周筮数的算得方法提出下述猜测：

①结果数为 1，2，3，…，8 的情形。如果以结果数组 {1，2，3，…，8} 作为出发点，按揲算模式，应考虑 $R=1$、$C=7$ 条件下的相关算法。若取 $M=3\sim5$，由

$$T=(R+2C)M=(1+2\times7)M=15M,$$

可知 T 的取值有 45、60 和 75 策三种。由

$$S=T+K\begin{cases}\text{无挂 1 时},(2-M)\leqslant K\leqslant 0,\\ \text{有挂 1 时},(3-M)\leqslant K\leqslant 1,\end{cases}$$

便可以确定参揲总策数 S 的值。虽然从 S 的取值最少为 44 策(即 $M=3$、无挂 1、取 $K=-1$ 时，$S=45-1=44$)，最多不超过 76 策(即 $M=5$、有挂 1、取 $K=1$ 时，$S=75+1=76$) 来看，使用这些参揲总策数完成揲算应该没有问题，但是这类算法要经过 7 次变易才能求出 1 个结果数。如果说，对 3 数占法而言，需完成 $7\times3=21$ 次变易尚能接受的话，那么，对 6 个结果数一组的占筮法来说，整个揲算过程要历经 $7\times6=42$ 次变易才能完成，显然过于繁琐。笔者估计，古代占筮家们即使找到过这类算法，也不会给予重视，因为按照

同样的思路，他们完全有可能创制出比这类算法更加适合于占筮的若干种其他不同的算法。

② 结果数为 1,5,6,7,8 的情形。如果以结果数组{5,6,7,8} 作为反溯算法的出发点，则可以考虑揲算模式下 $R=5$、$C=3$、$M=3\sim5$，以及满足 K 值取值条件时，由定理 5 或定理 9 给出的这类特殊命题下的算法。由于在与 5、6、7、8 诸数同出的筮数中还有为数不少的 1，然而，在关于筮数的研究中，要找到一种算法，使数 1 的求得与 5、6、7、8 诸数的求得相协调，是相当困难的[注3]。笔者的想法是，筮数中数字 1 的出现，不妨用记录方式的特殊设置来解释。即当时在揲得结果数为 5 或 7 时，可能采用过一些不同的记录方式，一种是直接记为 5 或 7，另一种是将它们改记为 1。当然，也可能存在第三种记录方式，即依循某种我们目前尚不知道的具体规则，有部分筮数要由 5 或 7 改记为 1，而另一部分仍记为 5 或 7。在这些情况下，数 1 都不是筮算的结果，不必纳入算法的设计。如果这种推测大体上不错的话，那么改记做法似可认为是筮数向卦象符号过渡的早期形态，或者说数 1 在不少筮数记录的场合中具有符号的性质。本书第 5 章对传世揲算结果数的出现概率做了计算，发现将 6、7、8、9 这四种结果数分为奇偶后，出现概率几乎是相等的。这种情形对于结果数为 5、6、7、8 四种时也是一样的，即算得奇数(5 和 7) 与算得偶数(6 和 8) 的机会几乎也是均等的。从表 2－2 统计的结果来看，将筮数作奇偶分类后，奇数和偶数所占的比例的确相当均衡，这一现象应是对上述猜测的一种支持。

在不少情况下，定理 5 和定理 9 有相互重叠的地方。即，对同一参揲策数，有时会出现既可挂 1，也可不挂 1 的做法。对此，笔者倾向于认为在揲算的形成及定型过程中，很可能存在过从无挂 1 到有挂 1 的演进。此外，还可能存在过变易次数 C 从 1 次增加到 3 次，揲策数 M 从每次揲取 3 策增加到 5 策，最后定型于 4 策的演化过程。

如果按照传世揲算的模式，以所得结果数组为{5,6,7,8} 作为依据，由此反溯揲算方法时，当有多种具体算法可供选用。例如：

① 取 $C=3$、$R=5$、$M=3$ 时，

$S=(R+2C)M+K=(5+2\times3)\times3+K=33+K$。

由定理 9 的约束条件 $(2-M)\leqslant K\leqslant0$，即 $K=-1$ 或 0，可知 $S=32$ 或 33 策时，可做不挂 1 的揲算。

由定理 5 的约束条件 $(3-M)\leqslant K\leqslant1$，即 $K=0$ 或 1，可知 $S=33$ 或 34 策时，可做有挂 1 的揲算。

上述 4 种算法的结果数组都是{5,6,7,8}。

② 取 $C=3$、$R=5$、$M=4$ 时，

$S=(R+2C)M+K=(5+2\times3)\times4+K=44+K$。

由定理 9 的约束条件 $(2-M)\leqslant K\leqslant0$，即 $K=-2$、-1 或 0，可知 $S=42$、43 或 44 策时，可做不挂 1 的揲算。

由定理 5 的约束条件 $(3-M)\leqslant K\leqslant1$，即 $K=-1$、0 或 1，可知 $S=43$、44 或 45 策时，可做有挂 1 的揲算。

上述 6 种算法的结果数组都是{5,6,7,8}。

③取 $C=3$、$R=5$、$M=5$ 时，

$S=(R+2C)M+K=(5+2\times3)\times5+K=55+K$。

由定理 9 的约束条件 $(2-M)\leqslant K\leqslant0$，即 $K=-3$、-2、-1 或 0，可知 $S=52$、53、54 或 55 策时，可做不挂 1 的揲算。

由定理 5 的约束条件 $(3-M)\leqslant K\leqslant1$，即 $K=-2$、-1、0 或 1，可知 $S=53$、54、55 或 56 策时，可做有挂 1 的揲算。

上述 8 种算法的结果数组都是 {5，6，7，8}。

可以认为，即使是在揲算模式下，得出筮数为 5、6、7、8 的具体算法的数量还会超出上述共计 18 种算法的范围。比如，根据定理 6 和定理 10 也可以构造出一系列可供选用的算法方案。这就是说，即使在局限于揲算模式的条件下，西周占筮家们仍有相当大的选择空间来完成筮算方法的设计和优化改进。显然，当揲算结果数组变为 {6，7，8，9} 时，同样存在数十种具体的算法设计可供选用，传世揲算的最后定型，很有可能是在这样的背景下逐步优选完成的。

进入西周后，相对于晚商，筮数 1 的比重有明显增加，尽管我们对殷商时期使用的占筮算法还缺乏了解，不过从形态上观察，如果设想商代的筮法也有将数 1 作奇数符号使用的做法的话，这种现象很可能是筮数符号化程度逐渐增强的表现。发展到西周晚期的时候，筮算结果的基本的记录规则已演化为筮得奇数时均记为一或阳爻，而筮得偶数时则记为六或阴爻，从而导致了卦象的出现。在这个过程中，算法设计也发生了改进，形态上的变化是结果数组由以 {5，6，7，8} 为主变成了 {6，7，8，9}，所用算法也定型为传世的《易》占算法。至于西周占筮家们最后选用了结果数组为 {6，7，8，9} 的算法的主要原因，本书第 7 章的 7. 2. 2 节通过对比研究做了一些相应的推测，也许可供参考。但是，如果要问古代占筮家们在众多可选算法中具体采用过哪些算法，经由了怎样的具体途径才完成了算法的优选定型工作，恐怕永远也找不到确切的答案了。

注　释：

［注 1］　华罗庚先生在《数学归纳法》（上海教育出版社，1963 年版）一书中对一元形式的数学归纳法作了详细的讲解，可供参考。

［注 2］　蒋文蔚先生和杨延龄先生在《数学归纳法》（北京师范大学出版社，1985 年 5 月版，第 129 页）中讨论了二元形式的数学归纳法，称之为“二重数学归纳法”，并指出：“有些命题与两个独立的自然数有关，记作 $p(n, m)$，要证明 $p(n, m)$ 对任意的自然数 n 和 m 都成立，有时可分以下两步进行：

(1) 证明：$p(1, m)$ 和 $p(n, 1)$ 成立。

(2) 假定：$p(n+1, m)$ 和 $p(n, m+1)$ 成立。

若：$p(n+1, m+1)$ 成立；则：$p(n, m)$ 成立。”

［注 3］　孔国平先生在《中国数学史大系・第一卷》（吴文俊主编，北京师范大学出版社 1998 年版，

第187～188页）给出的一种“西周筮法假说”中，对筮数1的获取途径提出了一种猜测。相关内容可参看本书第8章8.1.1节的（3）之⑥。

参考文献：

[1] 沈宜甲．科学无玄的周易．北京：中国友谊出版公司，1984．26

[2] 张政烺．易辨．见：中国哲学第十四辑．北京：人民出版社，1988．4

[3] 吴文俊．中国数学史大系·第一卷．北京：北京师范大学出版社，1998．168～192

第 5 章　《周易》揲算结果数的出现概率

> 及其筮也，七八常多，而六九常少。
>
> ——欧阳修《明用》

> 易经六十四卦代表六十四种可能之答案，每卦又有六爻，有六项不同之答案，则占者可能得到之命中率或为$\frac{1}{64}$，或为$\frac{1}{64\times6}=\frac{1}{384}$，此与近代数学之或然法相合。
>
> ——沈宜甲《科学无玄的周易》

《周易》占筮术中使用的起卦揲算得到的结果数有 6、7、8、9 四种可能。本章将根据现代数学中的概率理论讨论和计算这些结果数的出现概率，并在此基础上讨论和计算阴阳两种爻符的出现概率、六十四卦中各卦的出现概率，以及六十四卦的各类之卦的出现概率。

5.1　《左传》《国语》中的《易》占记录和问题的提出

左丘明是春秋晚期的鲁国史官，掌史之外，他肯定还是一位熟知卜筮的专家。也许是出于对卜筮的关注，他在其名作《左传》和相传也是他写的《国语》两书中，记录了二十余处涉及《易》占的历史事件。这些记录为后人研究先秦时期的占筮提供了重要的材料，本章讨论的问题便与其中用《周易》占筮术行占的筮例有关。

按照《周礼·春官宗伯·大卜》的说法，周代统称为《易》的占筮方法有 3 种：

> 一曰《连山》，二曰《归藏》，三曰《周易》。其经卦皆八。其别皆六十有四。

大约在汉晋时期，三《易》中的《连山》《归藏》二《易》先后失佚，只有《周易》占筮术传续至今。历代学者多认为《左传》《国语》所记《易》占，应当包含这3种占法。例如尚秉和先生曾说：

> 《左传》《国语》所谓“《艮》之八”，“《泰》之八”，以及所引繇辞为《周易》所无者，先儒皆谓二《易》之辞也[1]。

其中的“二《易》”即《连山》和《归藏》。一般认为，三《易》的卦象相同，用于成卦的筮算方法也相同，差别在于：

> 《连山》《归藏》用七八，以不变为占，而《周易》用九六，以变为占[2]。

这里的“变”和“不变”，与所谓的“变卦”占筮法有关。在《左传》《国语》筮例中，凡用《周易》占筮术作占，几乎都有变卦的情形出现，其句式通常写作“遇……之……”。例如《左传·庄公二十二年》的“遇《观》䷓之《否》䷋”，以及《左传·闵公元年》的“遇《屯》䷂之《比》䷇”，等等。在这里，所“遇”的是揲算得到的卦象，称为“本卦”，所“之”的便是由本卦变得的另一个卦象，称为“之卦”。关于《周易》占筮术采用的变卦规则，《易学启蒙·考变占第四》云：

> 用九、用六者，变卦之凡例也。

也就是通常所说的“九六变，七八不变”。按此规则，求取本卦时，若揲扐计算结果数为6或9，对应的爻符才能由“− −”或“——”变为“——”或“− −”。而所得结果数为7或8时，对应的爻符“——”或“− −”则不能变换。显然，在使用《周易》变卦占法作占的条件下，只要知道了本、之两卦的卦象即可反推出本卦成卦时所依据的揲算结果数。应当说，在还原古代筮例的揲算结果数时，这是一个很有用的结论。

由于本章是依循传世《周易》以变为占的规则，根据本、之两卦反推占筮时得到的揲算结果数，所以在引用《左传》《国语》筮例时，只能挑选其中可判断确为使用《周易》的实占事件。满足条件的筮例共有13件，它们明确给出了在实际占筮时，通过揲扐计算得到的“本卦”和变卦后所得“之卦”的卦象。故可根据这13件筮例的本卦和之卦，反推出本卦成卦时揲扐计算所得的结果数。具体情况参看表5−1。

表 5－1 《左传》《国语》中的《周易》实占卦象和推得的筮数

易占事件	本卦	之卦	易占事件	本卦	之卦	易占事件	本卦	之卦	易占事件	本卦	之卦
1 庄二十二年《观》之《否》一爻变	—7 —7 - -6 - -8 - -8 - -8	— — —* - - - - - -	2 闵元年《屯》之《比》一爻变	- -8 —7 - -8 - -8 - -8 —9	- - — - - - - - - - -*	3 闵二年《大有》之《乾》一爻变	—7 - -6 —7 —7 —7 —7	— —* — — — —	4 僖十五年《归妹》之《睽》一爻变	- -6 - -8 —7 - -8 —7 —7	—* - - — - - — —
5 僖二十五年《大有》之《睽》一爻变	—7 - -8 —7 —9 —7 —7	— - - — - -* — —	6 周语下《乾》之《否》三爻变	—7 —7 —7 —9 —9 —9	— — — - -* - -* - -*	7 襄九年《艮》之《随》五爻变	—9 - -6 - -6 —9 - -8 - -6	- -* —* —* - -* - - —*	8 襄二十五年《困》之《大过》一爻变	- -8 —7 —7 - -6 —7 - -8	- - — — —* — - -
9 昭五年《明夷》之《谦》一爻变	- -8 - -8 - -8 —7 - -8 —9	- - - - - - — - - - -*	10 昭七年《屯》静爻	- -8 —7 - -8 - -8 - -8 —7	不变	11 昭七年《屯》之《比》一爻变	- -8 —7 - -8 - -8 - -8 —9	- - — - - - - - - - -*	12 昭十二年《坤》之《比》一爻变	- -8 - -6 - -8 - -8 - -8 - -8	- - —* - - - - - - - -
13 哀九年《泰》之《需》一爻变	- -8 - -6 - -8 —7 —7 —7	- - —* - - — — —	注：本卦爻符旁的数字为反推得到的揲算结果数，发生变化的爻符在之卦旁用 * 号标出。								

关于《左传》《国语》中的未选《易》例，说明如下：

（1）**因事取义的筮例**

以下 13 件筮例均为因事取义，不是实际占筮，故不取：僖十五《震》之《离》、《离》之《震》；宣六《丰》之《离》；宣十二《师》之《临》；襄二十八《复》之《颐》；昭元《蛊》；昭二十九《乾》之《姤》、之《同人》、之《大有》、之《夬》、之《坤》，以及《坤》之《剥》；昭三十二《大壮》。

（2）**不能肯定是用《周易》占筮术求占的筮例**

以下 6 例不能肯定是用《周易》占筮术求占，故不取：僖十五《蛊》；成十六《复》；襄九《艮》之八；晋语四《泰》之八；晋语四贞《屯》、悔《豫》，皆八。

（3）**之卦不明的筮例**

以下 2 例虽为实占，又用《周易》作释，但之卦情况不明，不能据以推出揲算结果数，故不取：出自晋语四贞《屯》、悔《豫》，皆八。后改为《屯》和《豫》。

此外，以下 1 例有异议：襄九《艮》之《随》。此例本卦出于襄九《艮》之八，后来史官又改用《周易》作《艮》之《随》。若是依实占改得，则为可取之例，但若是史官因事取义而编造的“之《随》”，则不可取。两种解释，尚不能确证谁对。笔者估计史官不会随便乱编，故本书暂取前者。

所选 13 个筮例的本卦共有 6×13＝78 爻，它们分别由 78 个独立完成的揲扐计算结果数所确定。在这些经由实际揲算得到的结果数中：

结果数 6 共出现 9 次，出现频率为 9/78=0. 1154；
结果数 7 共出现 28 次，出现频率为 28/78=0. 3590；
结果数 8 共出现 32 次，出现频率为 32/78=0. 4102；
结果数 9 共出现 9 次，出现频率为 9/78=0. 1154。
（计算结果精确到小数点后 4 位）

显然，结果数 6 和 9 的出现频率很低，而 7 和 8 的出现频率则相当高。按照直观的感觉，6、7、8、9 这 4 个结果数的出现频率似乎不应该有这样大的差距，而实算差异为什么会如此之大呢？其原因要么是《左传》和《国语》所录的例子仍然嫌少，虽然已有 78 个实算结果，相对 4 种结果数应能反映出一定的统计规律，但也可能碰巧选到的恰是一边倒的筮例，因而不具有代表性；要么就是直观的感觉靠不住。

北宋学者欧阳修（1007—1072）在其占筮活动中也发现了这种情形，在他所写的《明用》一文中，有“及其筮也，七八常多，而六九常少”的说法（见《四库全书·子部》）。可见揲算结果数出现频率的不均衡很可能并非偶然现象。

由于问题的实质与揲算结果数的出现概率有关，因而可以通过现代数学中的概率分析，对“七八常多，而六九常少”的现象作出相应的解释。此外，若将《周易》占筮术中涉及概率计算的各种结果应用于相关的考古研究，也许能得到一些有参考价值的结论。

揲算是一种具有随机性的操作型算法，研究揲算必然涉及概率计算方面的问题。比如揲算结果数的出现概率、爻符和卦象的出现概率、变卦规则下之卦的出现概率等等，都要根据概率理论通过具体的分析计算才能求出。其中，揲算结果数出现概率的计算最为重要，是解决《周易》占筮术中各种概率计算问题的基础。应当说明，本书涉及的这些概率计算方面的问题都可以用古典概率理论予以解决，数学上并无特别的困难，只需弄清《周易》占筮术中的相关规则和名词定义就可以了。否则，计算得到的结果将是其他条件下的概率数值，而与《周易》占筮术无关。

5.2 揲扐计算结果数出现概率的分析

5.2.1 从揲算规则看结果数的获得渠道

根据《易传·系辞上》“大衍之数”章的揲算成卦规则，求出某一个结果数的一轮揲扐计算（包含了 3 次变易）是完全独立的，所以只需对一轮揲算进行研究就可以了。而一轮揲算中从计算到定出爻符的过程，可以简明地用各次变易后参揲策数变化状况的枝形关系将所有可能出现的情形表示如下：

$$49\begin{cases}49-9=40\begin{cases}40-8=32\begin{cases}32-8=24\\32-4=28\end{cases}\\40-4=36\begin{cases}36-8=28\\36-4=32\end{cases}\end{cases}\\49-5=44\begin{cases}44-8=36\\44-4=40\begin{cases}40-8=32\\40-4=36\end{cases}\end{cases}\end{cases}\qquad\begin{matrix}24\div4=6\\28\div4=7\\32\div4=8\\36\div4=9\end{matrix}$$

⋮　⋮　⋮　⋮　⋮

第 1 次变易　第 2 次变易　第 3 次变易，　可能出现的结果数　对应的爻符

显然，6、7、8、9 这 4 个可能出现的结果数的获得渠道的多少是有差异的。逐一分列出来便是：

$49-9-8-8=24,\qquad 24\div4=6;$

$$\left.\begin{matrix}49-9-8-4\\49-9-4-8\\49-5-8-8\end{matrix}\right\}=28,\qquad 28\div4=7;$$

$$\left.\begin{matrix}49-9-4-4\\49-5-8-4\\49-5-4-8\end{matrix}\right\}=32,\qquad 32\div4=8;$$

$49-5-4-4=36,\qquad 36\div4=9$。

可知结果数的获得渠道一共有 8 个，但其中 6、9 两数都只有一个获得渠道，而 7、8 两数则各有 3 个获得渠道。单从这一步就表明，7、8 两数的出现概率应明显地高于 6、9 两数的出现概率。但是事情还不止此，结果数的出现概率还应与各次变易完成后揲得的策数（即上列 40、44；32、36、40；24、28、32、36 诸数）有直接的关系。由于这些策数的出现概率等价于相应扐策数的出现概率，因而相关分析可以转化为与各次变易中可能发生的扐策数（即上面列出的 8 个渠道中作为减数的 4、5、8、9 四个数）的出现概率有关。所以，还要作进一步的讨论，才能求出结果数的出现概率。

5.2.2 各次变易中可能发生的扐策数的出现概率

按《易传·系辞上》“大衍之数”章记载的成卦算法，用来确定爻符的揲扐计算过程是：将 49 根蓍草或竹签（称为策）随机地分成两堆（“分二”），然后从任意一堆中取出 1 策放在一边（即“挂一”，这种取法等价于约定每次都只能从某一堆中取出 1 策），但取后该堆的策数不能为零。再对两堆策分别“揲四”，即每次 4 根地将策数出，直到各堆所余策数小于或者等于 4 策，但不能为零。之后将两堆揲后的余策和挂出的 1 策一并通过“归扐”而退出揲算。我们将这样退出揲算的策数称为扐策数。下述概率分析的前提条件是每一次变易的“分二”、“挂一”操作必须是随机的，不能掺入人为控制的因素。在《周易》筮法中，这个条件可以得到满足。

(1) 第 1 次变易时

在第 1 次变易中，扐策数的量值不 5 则 9。虽然归扐的策数只有 5 或 9 两种，但是它们出现的概率如何则应作详细分析。由于可能出现的情形是有限的，而且其数量不大，根据表 5－2 中采用全举的办法列出的所有可能出现的情形，可知归扐 5 策的概率是 $P_1 = 72/94$。(如果不是随机地从两堆策中挂 1，而是指定只能从 Ⅰ、Ⅱ 两堆中的某一堆挂 1，则归扐 5 策的概率是 $P_1 = 36/47$，显然，从概率计算的角度看，两种挂 1 方法是等价的。下同) 而归扐 9 策的概率为 $P_2 = 22/94$。

(2) 第 2 次变易时

在第 2 次变易中，用于揲算的策数是 $49 - 5 = 44$ 策，或 $49 - 9 = 40$ 策。虽然有两种参揲策数，但它们都必然是 4 的整数倍。根据本书第 4 章中给出的定理 1，可知分 2、挂 1、揲 4 之后，归扐的策数都是不 4 则 8。但是，对于不同的参揲策数，在第 2 次变易中的扐策数 4 和 8 的出现概率并不相同。

对于 44 策，可以将归扐 4 策的概率记为 P_3，且 $P_3 = 44/84$；而将归扐 8 策的概率记为 P_4，且 $P_4 = 40/84$。

对于 40 策，可以将归扐 4 策的概率记为 P_5，且 $P_5 = 40/76$；而将归扐 8 策的概率记为 P_6，且 $P_6 = 36/76$。

用全举法完成的统计过程参看表 5 －2。

(3) 第 3 次变易时

在第 3 次变易中，参揲的策数再次发生了变化，共有 32、36 和 40 策 3 种。由于它们都必然是 4 的整数倍，因此扐策数的出现情况与第二次变易时相同，都只有 4 策或 8 策两种可能，但是不同参揲策数的扐策数在第 3 变中出现的概率仍不相同。在第 3 次变易中用到的不同的参揲策数有 36 和 32 两种，而 40 在第 2 次变易中已碰到过。

对于 36 策，可以将归扐 4 策的概率记为 P_7，且 $P_7 = 36/68$；而将归扐 8 策的概率记为 P_8，且 $P_8 = 32/68$；

对于 32 策，可以将归扐 4 策的概率记为 P_9，且 $P_9 = 32/60$；而将归扐 8 策的概率记为 P_{10}，且 $P_{10} = 28/60$。

用全举法完成的统计过程参看表 5－2。

5.2.3 揲算结果数出现概率的计算

以前面的研究结果为基础，现在可以对揲算结果数 6、7、8、9 的出现概率做完整的分析和计算。计算结果精确到小数点后 4 位。

表5－2 《周易》揲算过程中可能出现的扐策数统计及出现概率
（按参揲策数以4为周期排出）

参揲策数			49				44				40				36				32			
第一周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
		Ⅱ堆策数	48	47	46	45	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
	扐策数	从Ⅰ堆挂1		5	5	5		4	4	8		4	4	8		4	4	8		4	4	8
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8
第二周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
		Ⅱ堆策数	44	43	42	41	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9	5	5	5	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8
第三周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
		Ⅱ堆策数	40	39	38	37	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9	5	5	5	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8
第四周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16
		Ⅱ堆策数	36	35	34	33	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9	5	5	5	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8
第五周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	17	18	19	20	17	18	19	20	17	18	19	20	17	18						
		Ⅱ堆策数	32	31	30	29	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18						
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9	5	5	5	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4						
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4						
第六周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	21	22	23	24	21	22														
		Ⅱ堆策数	28	27	26	25	23	22														
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9	5	5	5	8	4														
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4														
可能出现的扐策数的种数①			出5有72种，出9有22种				出4有44种，出8有40种				出4有40种，出8有36种				出4有36种，出8有32种				出4有32种，出8有28种			
扐策数的出现概率②			$P_1=72/94$；$P_2=22/94$				$P_3=44/84$；$P_4=40/84$				$P_5=40/76$；$P_6=36/76$				$P_7=36/68$；$P_8=32/68$				$P_9=32/60$；$P_{10}=28/60$			

注：①由于具有对称性，表中只列了一半的周期数值，种数统计时已考虑了另一半的情形。

②如果约定只能从Ⅰ、Ⅱ两堆中的某一堆挂1，本表可相应简化，所得扐策数的出现概率均为表中P值的分子分母同时除以2。

（1）**结果数6的出现概率**

揲算结果数为6时，对应于3变结束后的揲策总数为24。获得6的渠道只有1个，这个结果数的出现概率取决于相应的3次变易中扐策数的出现概率，根据概率理论中的乘法原则，可按下式计算（计算结果精确到小数点后4位）：

$P(6)=P_2\times P_6\times P_{10}=22/94\times36/76\times28/60=0.0517$。

(2) **结果数 7 的出现概率**

揲算结果数为7时，对应于3变结束后的揲策总数为28。获得7的渠道共有3个，根据概率理论中的乘法原则，它们的出现概率分别为：

$P(7)_1 = P_2 \times P_6 \times P_9 = 22/94 \times 36/76 \times 32/60 = 0.0591$；

$P(7)_2 = P_2 \times P_5 \times P_8 = 22/94 \times 40/76 \times 32/68 = 0.0580$；

$P(7)_3 = P_1 \times P_4 \times P_8 = 72/94 \times 40/84 \times 32/68 = 0.1716$。

根据概率理论中的加法原则，获得 7 的概率为：

$P(7) = 0.0591 + 0.0580 + 0.1716 = 0.2887$。

(3) **结果数 8 的出现概率**

揲算结果数为8时，对应于3变结束后的揲策总数为32。获得8的渠道共有3个，根据概率理论中的乘法原则，它们的出现概率分别为：

$P(8)_1 = P_2 \times P_5 \times P_7 = 22/94 \times 40/76 \times 36/68 = 0.0652$；

$P(8)_2 = P_1 \times P_4 \times P_7 = 72/94 \times 40/84 \times 36/68 = 0.1931$；

$P(8)_3 = P_1 \times P_3 \times P_6 = 72/94 \times 44/84 \times 36/76 = 0.1901$。

根据概率理论中的加法原则，获得 8 的概率为：

$P(8) = 0.0652 + 0.1931 + 0.1901 = 0.4484$。

(4) **结果数 9 的出现概率**

揲算结果数为9时，对应于3变结束后的揲策总数为36。获得9的渠道只有1个，根据概率理论中的乘法原则，结果数 9 的出现概率为：

$P(9) = P_1 \times P_3 \times P_5 = 72/94 \times 44/84 \times 40/76 = 0.2112$。

上述计算结果表明，4 种可能得到的结果数的出现概率是极不均衡的。得 6 的机会最少，其出现概率仅为 0.0517。得 9 次之，出现概率为 0.2112。得 7 排第三，出现概率为 0.2887。而得 8 的机会最多，出现概率高达 0.4484，几乎有一半的揲算都会得到 8 这个结果数。

与《左传》和《国语》中的 13 个筮例相对比，立即发现实算结果数的出现频率与理论计算所得的概率基本相符（参看表 5－3）。从而可以用概率计算的结果解释 6、9 常少而 7、8 常多的揲扐计算现象。尽管《左传》《国语》筮例中 6 和 9 的统计频率与算得概率之间的偏差显得比较大，但可相信当取用实例的数量增大时，这种偏差会变得小些。

表 5－3　《左传》、《国语》筮例中揲算结果数的统计频率与概率比较

结果数	统计频率(实占)		概率(理论)	
6	9 次	0.1154	$P(6)$	0.0517
7	28 次	0.3590	$P(7)$	0.2887
8	32 次	0.4102	$P(8)$	0.4484
9	9 次	0.1154	$P(9)$	0.2112
合计	78 次	1		1

注：计算结果精确到小数点后 4 位。

5.3　爻符、卦象和各类之卦的出现概率

利用结果数出现概率的计算结果，可以对爻符、卦象和之卦的出现概率进行计算。从本书对这些概率计算结果的应用需求来看，爻符和卦象的出现概率可用于某些问题的分析和讨论，故有加以计算的需要。对于之卦，由于总数有 4096 个之多，在本书的讨论范围内，之卦出现概率的用处不大，因而没有逐一算出的必要。不过，这 4096 个之卦可以根据变爻的数量分成 7 种类型，而分类之卦的出现概率则可以作为一种概率指标加以应用，所以本节给出了 7 种分类之卦出现概率的计算结果。

5.3.1　阳爻和阴爻的出现概率

就本卦的成卦来说，揲算完成后，得奇数结果 7 或 9 时所定出的爻符都是阳爻“——”，得偶数结果 6 或 8 时，定出的爻符都是阴爻“－－”。根据概率理论中的加法原则，得阳爻的概率是结果数为 7 和 9 时的概率相加的和。精确到小数点后 4 位时，计算如下：

$P(\text{阳}) = P(7) + P(9) = 0.2887 + 0.2112 = 0.4999$；

同理，得阴爻的概率是算得结果数为 6 和 8 时的概率相加的和。精确到小数点后 4 位时，计算如下：

$P(\text{阴}) = P(6) + P(8) = 0.0517 + 0.4484 = 0.5001$。

上述结果表明，按照传世的揲算规则，得到阴爻的概率，理论上将略微地高于得到阳爻的概率。如果将上述计算的精度提高到小数点后 6 位的话，结果是 $P(\text{阳}) = 0.499903$ 和 $P(\text{阴}) = 0.500097$。两者的差值约为 0.000194，即不到万分之二，小到了可以忽略不计的程度。如果认为古代占筮家们并未做过精度足够高的与爻符出现概率有关的计算的话，可以推知他们并不确知在揲算规则中存在着阴阳爻符的出现概率略有差异的情况。另一方面，由于这一差值实在太小，他们要想在占筮活动中观察总结出阴爻出现频率较阳爻略高的规律，是根本不可能的。事实上，在传世的已有文献中从未发现与此相关的记载。因而，可以排除有人利用这一差值来操控占筮结果的可能性。或者说，就占筮要求而言，揲算成卦时阴阳爻符出现概率的微小差异的确可以略去不计，从而直接将它们记为 $P(\text{阳}) = P(\text{阴}) = 0.5$。这样，揲算成卦时阳爻或阴爻出现的概率都是相同的，没有哪一个会显得较特殊。这种不直接依据揲算结果数进行吉凶判断，而是按揲算结果数的奇偶特性转换成阴阳爻符的做法，有效地解决了揲算结果数出现概率极不均衡的问题，使爻符及卦象的获取具有了非常重要的均衡性质。此外，从本书关于揲算的研究目的来看，把阳爻和阴爻的出现概率都记为 0.5 之后，将使接下去的讨论和计算得到合理的简化，有利于后续工作的展开。

在表 5－1 所列《左传》《国语》中 13 个筮例的 78 个本卦爻符中，阳爻有 37 个，阴爻有 41 个，可得阳爻和阴爻的出现频率分别为 $37/78 = 0.4744$ 和 $41/78 = 0.5256$，的确接近于 P（阳）$=P$（阴）$=0.5$ 的概率数值。

5.3.2 64 种卦象的出现概率

阳爻和阴爻的出现概率都极其近似地等于 0.5 的情况对于六十四卦的构成来说正好也是匹配的，因为在 $6\times64=384$ 个爻符中，只有阳爻和阴爻两种爻符。这样，对于 384 个位置上的爻符来说，任何一个的出现概率都是 1/384。可见《周易》本卦揲算成卦时，由 6 个爻符构成的 64 种卦象的出现概率必然相等，都等于 $1/384\times6=1/64$。也就是说，每一种卦象的获得机会都是相同的，从数学的角度来看，揲扐算法的确是一种很合理的没有任何偏见的成卦设计。

关于任何一种本卦卦象的出现概率都是 1/64 的结论，还可以用其他方法予以证明。例如：将由揲算给定的某种卦象记为《G》$_6$，脚标 6 表示这是一个 6 画卦。如果在《G》$_6$ 的 6 个爻符中，有 n 个是阳爻，则其余 $6-n$ 个爻符必定是阴爻。其中 $0\leqslant n\leqslant6$。由于阳爻由揲算结果数 7 或 9 决定，阴爻由揲算结果数 6 或 8 决定，而在 64 种卦象共计 384 个爻符中，阳爻和阴爻的数量各有一半，都是 192 个，可得《G》$_6$ 的出现概率 P(《G》$_6$) 为：

$$P(《G》_6) = [P(6)+P(8)](6-n)/192+[P(7)+P(9)]n/192$$
$$= [0.5(6-n)+0.5n]/192 = 3/192 = 1/64。$$

在表 5－1 所列《左传》《国语》筮例的 13 个本卦中，除《屯》卦出现了 3 次，《大有》卦出现了 2 次，其余卦象都只出现 1 次，成卦分布大体上是均匀的。因此，这些筮例也大致印证了 64 种卦象具有均等出现概率的结论。在实际占筮中，这种从爻符到卦象都具有的出现机会的均衡性，反映在筮者不能预知所得将为何卦上。如果不存在这种均衡性，在积累了足够多的经验以后，那些出现频率偏高的卦象必然会引起一些占筮家的注意，从而有可能使他们对所得卦象成功地进行预先的估计。然而，在几乎所有关于《周易》占筮术的文献记录中，尚无涉及卦象的出现频率存在着不均衡的现象的情形，更没有发现在筮算完成之前就预先知道将得出哪一卦的例证。西周时代的占筮家们所达到的这种设计水平（包括卦象的设计和成卦算法的设计），的确令人惊叹。虽然目前还没有证据证明《周易》占筮术的发明者们已经掌握了类似于概率分析方面的知识，但这种设计具有所得爻符和卦象在概率分布上的合理性并显示出一种均衡意识则是不争的事实。

附带指出，对于八卦来说，根据同样的理由，不难证明任何一个八卦卦象的出现概率都是 P（《G》$_3$）$=1/8$，作为由阴阳爻符构成的 3 画卦的卦象，它们的出现概率也是均衡的。

5.3.3 各类之卦的出现概率

按照变卦规则，揲算得到的本卦将变成哪一种之卦，全由揲算结果数决定。由于每个卦象都由 6 个爻符构成，如果成卦时 6 轮揲算的结果数都是 7 或 8，所得本卦将无爻可变，此时本之两卦便是相同的，称为静爻。如果在揲得本卦时，6 个爻符中只有一个是由揲算结果数 6 或 9 确定的，这个爻符就要发生变化，此时本之两卦相比，必有一个爻符不同，称为一爻变。同样地，还存在二爻变、三爻变、四爻变、五爻变和六爻变，一共有 7 种之卦类型。应当指出，在表 5－1 中所举的 13 个筮例中，静爻（昭七年），三爻变（周语下）和五爻变（襄九年）各有 1 例，其余 10 例全部都是一爻变，显示出各类之卦的出现频率有一边倒的不均衡现象。对此，有加以说明的必要，从而涉及六十四卦的各类之卦出现概率的计算。

不难证实，对于任何一个 6 画本卦，它的之卦都有 64 个。其中静爻和六爻变各 1 个、一爻变和五爻变各 6 个、二爻变和四爻变各 15 个、三爻变有 20 个。于是，对于 64 个本卦，一共就有 $64\times64=4096$ 个可能出现的之卦，它们同样也可分为 7 种类型。这 7 种之卦类型的出现概率 $P(B_i)$ 可用下面的算式进行计算：

$$P(B_i)=\left[\sum_{j=6}^{9}P(j)a_{ij}\right]\div 6144 \qquad (\mathrm{F}-1)$$

其中，$i=0,1,\cdots,6$；$j=6,7,8,9$。参数 a_{ij} 的值可以从表 5－4 中查取。在该表的合计栏中则显示出与 j 值对应的的爻符合计数都等于 6144。

a_{ij} 是与 7 种之卦类型和 4 种揲算结果数对应的之卦爻符个数，双下标中的 i 表示之卦类型，j 表示揲算结果数。显然，表 5－4 中 a_{ij} 数值的总和必须等于所有可能出现的之卦的总爻数 $6\times4096=24576$。之卦中与 $j=6$ 或 9 对应的爻符是发生了变化的爻符，不妨称为变爻，即变得之爻。在表 5－1 中，有 * 的爻符都是变爻。之卦中与 $j=7$ 或 8 对应的爻符没有发生变化，可称为不变爻。在这里，表示之卦类型的值也就是变爻的爻数。a_{ij} 的数值可用下述方法确定：

表 5－4　　计算 $P(B_i)$ 时取用的 a_{ij} 值

之卦类型	之卦种数	之卦爻数	与揲算结果数对应的爻符数 a_{ij}					7 类之卦的出现概率 $P(B_i)$
			a_{ij} i \ j	6	7	8	9	
静爻	64×1＝64	6×64＝384	0	0	192	192	0	0.0231
一爻变	64×6＝384	6×384＝2304	1	192	960	960	192	0.1234
二爻变	64×15＝960	6×960＝5760	2	960	1920	1920	960	0.2714
三爻变	64×20＝1280	6×1280＝7680	3	1920	1920	1920	1920	0.3125
四爻变	64×15＝960	6×960＝5760	4	1920	960	960	1920	0.1973
五爻变	64×6＝384	6×384＝2304	5	960	192	192	960	0.0641
六爻变	64×1＝64	6×64＝384	6	192	0	0	192	0.0082
合计	64×64＝4096	6×4096＝24576	7 种	6144	6144	6144	6144	1

注：$P(B_i)$ 的值精确到小数点后 4 位。

(1) 静爻情形

此时 $i=0$。由于之卦中全是不变爻，没有变爻，所以 $a_{06}=a_{09}=0$。

又因静爻时，所有可能出现的之卦正好就是 64 种本卦自身，可知在 384 个之卦爻符中，阳爻和阴爻的数量必定各占一半。

故 $a_{07}=a_{08}=384\times1/2=192$。

(2) 一爻变情形

此时 $i=1$。因为每个之卦中只有 1 个变爻，而其余 5 个都是不变爻，所以在 384 种一爻变之卦的 2304 个爻符中，变爻数量占 1/6，不变爻数量占 5/6。另一方面，对于 $2304\times1/6=384$ 个变爻，因为它们是由 64 种本卦，每卦的 6 个爻符逐一依序变化而得(即变爻数为 $6\times64=384$)，可知其中必有一半是阳爻，另一半是阴爻。注意到在 2304 个一爻变的之卦爻符中，阳爻和阴爻必定各占一半，可知在不变爻中也是阳爻和阴爻各占一半。

故　$a_{16}=a_{19}=2304\times1/6\times1/2=192$；

　　$a_{17}=a_{18}=2304\times5/6\times1/2=960$。

(3) 二爻变情形

此时 $i=2$。因为每个之卦中都有 2 个变爻，而其余 4 个都是不变爻，所以 960 种二爻变之卦的 $6\times960=5760$ 个爻符中，变爻数量占 2/6，不变爻数量占 4/6。另一方面，对于 $5760\times2/6=1920$ 个变爻，因为它们都是由 64 个本卦，每卦逐一依序变得，可知其中必有一半是阳爻，而另一半是阴爻。注意到在 5760 个二爻变的之卦爻符中，阳爻和阴爻必定各占一半，可知在不变爻中也是阳爻和阴爻各占一半。

故　$a_{26}=a_{29}=5760\times2/6\times1/2=960$；

　　$a_{27}=a_{28}=5760\times4/6\times1/2=1920$。

类似地，便可求出表 5－4 中所有 a_{ij} 的数值。

下面以之卦类型为一爻变时，其出现概率 $P(B_1)$ 的计算为例，说明按式(F－1)完成

的 $P(B_i)$ 的计算过程：

$$P(B_1) = [P(6)a_{16} + P(7)a_{17} + P(8)a_{18} + P(9)a_{19}] \div 6144$$
$$= (0.0517 \times 192 + 0.2887 \times 960 + 0.4484 \times 960 + 0.2112 \times 192) \div 6144$$
$$= 0.1234。$$

表 5－4 列出了由式(F－1)求得的 7 种 $P(B_i)$ 的值，显然，各类之卦的出现概率很不均衡。理论上，三爻变的出现机会几乎要占占筮总数的三分之一，而六爻变的出现机会却不到百分之一。

一个有趣的现象是：当 i 为奇数时，$P(B_i)_n$ 的和等于 0.5。因而当 i 为 0 和偶数时，$P(B_i)_n$ 的和同样也等于 0.5。

作为一个算例，在 $n = 6, i = 0, 1, 2, \cdots 6$ 时，根据前述表 5－4 中列出的 7 种之卦类型出现概率的计算结果，有

$0.0231 + 0.2714 + 0.1973 + 0.0082 = 0.5$；

$0.1234 + 0.3125 + 0.0641 = 0.5$。

与 $P(B_1) = 0.1234$ 相比较，表 5－1 中列出的《左传》《国语》筮例中，一爻变类型的确是出现得太多。这种情形当属偶然，其出现与所选筮例只有 13 例，相对 7 种之卦类型，选取数量过少有关。要想从实际占筮中观察到与不同类型之卦出现概率相近的统计结果，一般需要进行足够多次数的占筮。[注1]

应当指出，对于 4096 种之卦，可以计算出各种之卦出现概率的理论数值。但是因为之卦基数较多，而实占统计数量往往偏少，作为一种概率指标，通常情况下应用意义不大，故本书未予计算。特殊情形的相关计算可参看本书第 6 章 6.3 节。

5.3.4 小结

根据传世的《易》占揲算方法和变卦规则，可以归结出 4 个主要的概率指标（精确到小数点后 4 位）：

① 揲算结果数 6、7、8、9 的出现概率分别为：

$P(6) = 0.0517$、

$P(7) = 0.2887$、

$P(8) = 0.4484$、

$P(9) = 0.2112$；

② 阴阳两种爻符的出现概率都可以近似地取为 0.5；

③ 六十四卦中任何一种卦象的出现概率都是 1/64；

八卦中任何一种卦象的出现概率都是 1/8；

④7 种之卦类型的出现概率分别为：

$P(B_0) = 0.0231$、

$P(B_1) = 0.1234$、

$P(B_2)=0.2714$、

$P(B_3)=0.3125$、

$P(B_4)=0.1973$、

$P(B_5)=0.0641$、

$P(B_6)=0.0082$。

在本书第 6 章中，这 4 个概率指标将为相关考古课题的研究提供一些参考。

注 释：

[注 1] 《左传·昭公二十九年》的《乾》之《姤》、之《同人》、之《大有》、之《夬》、之《坤》，以及《坤》之《剥》，是占筮家蔡墨说明所引繇辞出处的一种特殊方法，并非实际筮例，本书第 1 章，1.4.1 节之（3）称之为变卦标识法。其中一爻变有 5 例，涉及 5 条爻辞的出处标识，而六爻变有 1 例，涉及 1 条用辞的标识。这类变卦情形与繇辞之间存在一一对应的关系，故可用作繇辞出处的标识。在表 5－1 列出的筮例中，大部分都是一爻变，似乎与变卦标识法有联系，但仔细解读《左传》关于这些筮例的记录文字，可以肯定它们都是实际占筮的结果，而与变卦标识法没有关系。所以这些筮例的出现频率与概率 $P(B_1)=0.1234$ 有明显偏差，仍应视为一种因样本数量偏少而出现的偶然现象。

参考文献：

[1] 尚秉和. 周易尚氏学. 光明日报出版社，2006. 9 页

[2] 李学勤. 周易溯源. 巴蜀书社，2006. 45 页

第 6 章 《周易》揲算概率指标的考古应用

数量观念、概率统计观念正逐步地融入我国的考古研究中。

数量关系的研究不仅能揭示被研究考古资料中内含的，不易被传统的定性研究所看出的某些现象和规律，而且定量研究排除了在归纳和演绎等推理过程中可能出现的主观任意性。

——陈铁梅《定量考古学》

（北京大学出版社，2005 年 9 月版）

第 5 章给出了揲扐算法和卦象构成中涉及的 4 种概率指标。本章将使用这些结果以及相关的概率计算方法，讨论一些考古学中的课题。

6.1 《周易》揲算方法和变卦规则定型时期的下限

一般认为，《易传 · 系辞上》记载的揲算内容，是目前所知与传世揲算有关的最早记录。如果《系辞》中这段记载的成书时期不晚于战国的话，可以推测揲算定型为传世形态的时期应当早于这段文字成书的时期。此外，根据《左传》和《国语》中记录的与《周易》占筮术有关的若干筮例，可以推测传世揲算和变卦占法已普遍地应用于春秋时期各诸侯国王室甚至民间的《周易》占筮术中。本书第 5 章所做的一些概率计算的结果为这个判断提供了支持或佐证。根据这些材料，笔者进而推测采用传世揲算和变卦占法的《周易》占筮术极有可能定型于西周，但使用范围以西周王室为主，到了春秋时期才流传于各诸侯国中。

6.1.1 相关研究的概况

《左传》和《国语》中记载了春秋时期的许多占筮事件，其中大多数是用《周易》

作占时的相关记录。这些记录中所引用的繇辞和卦象与传世的《周易》文本完全相同，加上其他古代文献中相关的零星记载，历代学者一般认为《周易》经文和卦象在春秋时期已经定型，或者说，春秋时期使用的《周易》古经与今本《周易》中的经文和卦象相比较，已无性质上的差异。但是《左传》及其他古代文献中并没有具体介绍当时所用的占筮方法。因此，当时用《周易》求占，是否用《易传·系辞上》“大衍之数”章所载的揲算方法起卦，变卦规则是否就是九六变，七八不变，以及按怎样的办法索取释占繇辞等等，一般认为仍是需要考证的问题。事实上，由于揲算是一种操作型的算法，几乎所有的操作以及筮法上的许多细节，都是通过师传口授的方式传承，并不录于文字，因而西周和春秋时期《周易》筮法的形态，今人已很难获得详细的了解，只能根据已有的资料对一些主要的环节作相应的考证与推测。

在现有的文献材料中，有关揲算方法的记载，以成书于战国时期的《易传·系辞上》“大衍之数”章的内容为最早。《汉书·律历志第一上》曾论及“大衍之数”，但与行占无关。北周数学家甄鸾著有《五经算术》，书中对揲算成卦的方法做了说明，是目前所知较早的揲算注解。用“大衍之数”章所载的揲算方法起卦的详细说明，至唐贞观十六年（公元642年）才见于孔颖达《周易正义》的疏文中。可以认为，关于揲算的文字记录出现的时期比揲算定型的时期要晚得多，但是这种情形并不妨碍后人形成《左传》《国语》筮例所用的成卦算法就是《系辞上》所记载的“大衍”算法的判断。

变卦规则的文字记录出现更晚。此前北宋学者欧阳修在《明用》篇中说：

> 《乾》爻七九，九变而七无为，《易》道占其变，故以其所占者名爻。《坤》爻八六，六变而八无为，亦以其占者名爻。

这段话是用变卦规则来解释《乾》卦何以用“九”作爻题名称，以及《坤》卦何以用“六”作爻题名称。虽然欧阳修的本意不是介绍变卦规则，但他对九、六所做的易学解释却显示出变卦规则是由来已久的做法。后来朱熹和蔡元定在《易学启蒙·考变占第四》中说：

> 用九、用六者，变卦之凡例也。

他们还进一步给出了按变卦规则索取释占繇辞的方法。从此以后，关于变卦占法便有了比较明确的文字记录。但春秋、战国时期的索辞释占规则是否确如朱、蔡所说，仍有待考证。

虽然揲算方法和变卦规则的文字记录均有晚出的现象，但《左传》《国语》筮例中的“筮之，遇某卦之某卦”的模式历来都被释为变卦占法，其中的“筮”应当就是传世揲算。所以一般认为《易传·系辞上》“大衍之数”章所载的揲算方法和九六变而七八不变的变卦规则早已用于《左传》《国语》筮例，因而它们定型的时期不会晚于春

秋，甚至有可能更早。

关于《左传》《国语》所用筮法，向来都有学者关注或研究，也有学者直接就用传世筮法去探讨春秋及以前的相关课题。晚近的例子有：

清初学者毛奇龄著《春秋占筮书》3 卷，他说：

> 及书成而《易》义明，即占《易》之法亦与之俱明。

尚秉和是民国时期学者，他将毛氏的资料加以扩充，在《周易古筮考》中辑录了百余古代筮例，称：

> 揲蓍之法灿然大备。[1]

关于《左传》《国语》中的占筮，他们都是从筮例所引《周易》经文和释卦细节推断当时所用已是传世筮法。

朱伯崑先生的研究结论是：

> 《易传》提出的揲蓍成卦说，是大体可信的。[2]

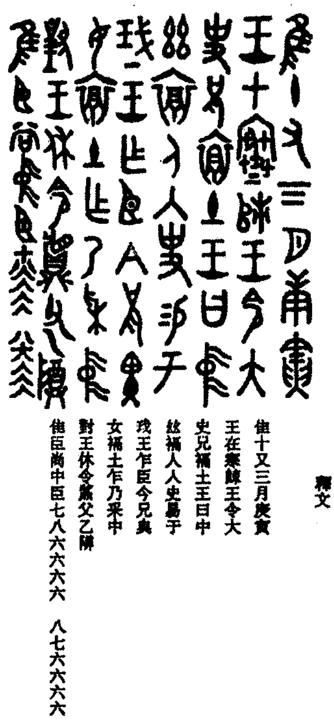


图 6－1　中方鼎铭文（西周早期）

（引自濮茅左《楚竹书周易研究》）

李学勤先生也认为“《左传》、《国语》所载有情节原委，足以推知当时筮法”就是传世的《周易》筮法，并用变卦占法推考中方鼎的筮铭（图 6－1)。中方鼎属周初昭王时器，是北宋重和元年（公元 1118 年）于今湖北孝感出土的“安州六器”之一。该器铭文之末铸有两条相连的数字：七八六六六六和八七六六六六，历代学者均不识其意。李先生认为这是当时的《易》占筮算记录，并模仿《周易》变卦规则的方式将它们释为遇《剥》之《比》，是二爻变。然后将《周易》《剥》卦六五和上九两条爻辞的传统释意与铭文所记之事对照，结论为：

> 方鼎铭没有明言《周易》，无法绝对判定用的是《周易》，不过用《周易》解释竟如此符合，恐怕不是偶然的。由此看来，《周易》的经文确可能在周初业已存在。[3]

如果李先生的考证不错，同时还能说明变卦占法已见用于周初的占筮，不过变法不同，因为方鼎筮铭所示是七八变，六不变，而定型后传世的变卦规则是九六变，七八不变。当然，方鼎铭文后面所附两组筮数中作为本卦的那一组筮数的筮得方法如何，仍是需要考证的问题。或者说，目前还没有证据足以表明这条方鼎筮铭是用《易传·系辞上》“大衍之数”章的方法揲得。

6.1.2 从概率统计角度所作的推考

现在，我们尝试用数学方法证明《左传》《国语》中的《周易》占例使用了传世揲算方法和变卦规则。我们先假定传世揲算和变卦规则已见用于《左传》《国语》中的《周易》占例，由此统计出当时筮算揲得结果数的出现频率，以及统计出相关的阴阳二爻、本卦卦象和之卦类型的出现频率。然后将这些频率值与理论计算得到的四个概率指标相对照。结果发现，除了之卦类型这一项因所取筮例过少而有较大偏差以外，其余三项均与概率指标有着较好的符合程度（参看第 5 章的相关内容)。这种情况已能说明前面所做的假定应当是正确的。为了减少这种推考方法的偶然性，笔者曾对多种类似的揲算和变卦方案做了试算，发现要在模仿古代十进制、100 以内正整数的四则运算，以及必须使用筹策工具的条件下，构造出与《左传》《国语》中的《周易》占例符合得更好的配套规则，几乎是一件不可能的事情。这样，本书就用概率理论为学者们所作的，传世揲算方法和变卦规则均见用于《左传》《国语》中的《周易》占例的判断，提供了一个来自数学领域的旁证，从而证明了在春秋时期的《周易》占筮术中使用的就是传世揲算方法和变卦规则。

注意到西周晚期，周室日衰，进入春秋以后，东周王室已难以保持过去的礼仪，管理部门对王室的卜筮事宜也逐渐失去了有效的控制。出于谋生等原因，一些熟知具体操作规程和释占办法的卜筮人员开始流亡于各诸侯国的王室或民间。这种情况恰好

使得原为周人所用的《周易》占筮术得到了广泛的传播。《左传·庄公二十二年》记载的发生于陈厉公二年（公元前 705 年）的那次占筮，就是一位在周王室做史官的占筮家携带《周易》文本为陈侯所筮，其文为：

> 周史有以《周易》见陈侯者，陈侯使筮之。遇《观》䷓之《否》䷋。曰："是谓'观国之光，利用宾于王。'"

《史记·陈杞世家》和《史记·十二诸侯年表》均记有此事。其中，本、之两卦的卦名卦象，以及《观》卦中发生了变化的六四爻所对应的繇辞"观国之光，利用宾于王"都与传世《周易》经文中的内容相符。一般认为，这次占筮所用占法与传世的《周易》占法相比较，在基本规则上已没有明显差异。考虑到周史带出的《周易》文本及施占方法应在周王室中已使用了一定的时间，不太可能是新近的发明或刚刚才定型的改进之作，其中所使用的揲算方法和变卦规则应当早已定型。而且这次占筮的时间距西周末年的公元前 771 年仅 66 年，按照古代相对缓慢的生活节奏，将揲算方法和变卦规则定型时期的下限推溯到西周晚期应该是可以的。

至此，关于传世的《周易》占筮术，大体上可以有以下认识：

——《周易》"经文的形成很可能在周初，不会晚于西周中叶"；[4]

——六十四卦的形成可能不迟于西周晚期，即《易经》成书可能不迟于西周晚期；

——揲扐算法的定型时期应不迟于西周晚期；

——变卦规则的定型时期应不迟于西周晚期，但索辞释占规则待考。

这样看来，作为一种比较成熟和稳定的占筮方法，传世形态的《周易》占筮术的基本规则可能定型于西周，定型时期的下限不迟于西周晚期。当然，以上认识是在现有条件下作出的推测，并非定论，其中有许多问题有待考古新材料的出现和深入的研究才能解决。

6.2　天星观、包山和葛陵卜筮简中的卦象是使用《周易》占法的记录

关于天星观、包山和葛陵楚简中的占筮符号记录，在现有的研究文献中有筮数和卦象两种解读。利用概率统计的方法，可以为这些符号记录都是用《周易》揲算和变卦占法画出的卦象的推测，提供一种具有一定可信度的佐证。

6.2.1　出土卦象简介

（1）天星观楚简中的卦象

1978 年江陵天星观楚墓出土一批竹简，其入葬时间断为公元前 350 年左右，为战国中期。其中的卜筮简记载了墓主人有关贞问"侍王"是否顺利、贞问忧患和疾病的

吉凶，以及贞问迁居新室能否“长居之”等方面的事宜，但没有引用《周易》繇辞，也没有说明所用的占筮方法。简文中有占筮卦象（参看图 2－4），据张政烺先生《易辨》一文中的介绍：

> 我见到的有八处，皆于一行之中两卦并列，实际上是十六个卦，当有九十六个爻。其所用数字最常见的是一和六，约占十分之九，仔细观察也有七、八、九这三个数字，但是很少，不过十分之一。

接着列写了其中的 5 例，共 10 卦。如果将这些卦象视为筮数，在 10 卦 60 数中，一和六占 57 数，七、八、九则各有 1 数出现。张先生认为：

> 在这些卦例中，一、六出现次数最多，已经不是筮数的自然现象，而是作为奇偶符号。七、八、九这三个数字如果是筮用数字，至少当出现三十多次，却如此罕见，这是什么原因呢？我的看法，当时的卦爻以一、六为主体，而使用的筮数原是有七、八、九的，到写成卦画时，一般都变成一和六了，在这几处偶然出现，或是由于某种原因（尚不明白）而保留着的……这八处易卦，都是两卦平列，使人很容易想到是卦变。[5]

（2）包山楚简中的卦象

1987 年，荆门包山楚墓（墓主人官居左尹，卒于楚怀王十三年，即公元前 316 年）出土一批战国竹简，其中的占筮简（参看图 2－4）中有 6 枚录有两卦一组的卦象，共得 6 组 12 卦，每组卦象均为左右各一卦，竖向并列画出，每卦都是 6 爻，共有 72 爻。多数卦象的内卦和外卦之间不留间隔。阳爻均做一横画，共有 34 爻。阴爻均做两斜画，分 3 种形态：上部相连，有 31 爻；上部分开，有 6 爻；两斜画交叉，仅有 1 爻。[6]有学者认为阳爻应释为数字一，阴爻应视其形态分别释为数字六、八和五，因而它们都是筮数，不是卦象。李学勤先生指出，这是一种误读，并论证它们应当是卦象，不是筮数。也就是说一横画都是阳爻，两斜画都是阴爻。[7]由于简文中没有引用《周易》繇辞，也没有注明占筮的方法，因而不能肯定是用《周易》占筮时得到的卦象。但从每卦 6 爻两卦并列的画法来看，很可能就是《周易》占筮术特有的变卦。当然，这个推测是否正确，还需要作进一步的讨论。

（3）葛陵楚简中的卦象

1994 年新蔡葛陵楚墓（墓主人平夜君成，是楚国封君，卒于楚肃王四年，即公元前 377 年）出土一批战国竹简，共得 1571 枚，大多数简文属于卜筮祭祀记录，其中涉及《易》卦者计 14 简，简文中录有两卦一组的卦象（参看图 2－4），共得 15 组 30 卦。其中完整者有 12 组 24 卦 144 爻，其余 3 组 6 卦有残损，可见的爻符有 18 个。每组卦象均为左右各一卦，竖向并列画出，每卦均为 6 爻。几乎所有卦象的内卦和外卦之间

都有间隔，以断开形式画出。爻符画法与包山简类似，阳爻均为一横画共 60 爻。阴爻均为两斜画共 102 爻，其中大部分为上部相连，有 92 爻；上部分开的有 5 爻；两画交叉的有 5 爻。[8]类似于包山简，这些卦画也曾被误读为筮数。李学勤先生论证后指出，它们应当是卦象符号，不是数字 。[9]由于简文中既没有引用《周易》繇辞，又没有注明使用的占筮方法，因而不能肯定这些卦象是用《周易》占筮时的记录。但从每卦 6 爻两卦并列的画法来看，估计也应与传世揲算方法和《周易》占筮术中使用的变卦规则有关。

6.2.2　从概率统计角度所作的推考

在本书第 2 章 2.2 节，已对这些占筮记录应释为卦象而非筮数的情况有过介绍。现在再从概率统计的角度做进一步的推考。

这三批占筮简的入葬时期都在战国中期，其书写年代比较接近，而且它们都出自楚墓，在地域上也有共性，具备统一讨论的基础条件。注意到这些竹简中的卦象都是

表 6－1　　**天星观、包山和葛陵楚简中的实占卦象与推得的揲算结果数**

天星观简	—9--* —9--* —7— —9--* —7— --8-- 《姤》之《解》 三爻变	—9--* —7— —7— --6—* —9--* --8-- 《讼》之《咸》 三爻变	—7— --6—* —7— --6—* --6—* —7— 《噬嗑》之《乾》 三爻变	—9--* --8-- --8-- --8-- --8-- --8-- 《剥》之《坤》 一爻变	—7— --8-- --8-- --8-- --8-- --8-- 《剥》之《剥》 静爻	
包山简	--8-- —9--* —7— --8-- —9--* —9--* 《兑》之《豫》 三爻变	--6—* --8-- --8-- --8-- —7— —7— 《临》之《损》 一爻变	—7— --8-- --8-- --6—* --6—* --8-- 《剥》之《蛊》 二爻变	—9--* --6—* —7— —9--* --8-- —7— 《离》之《随》 三爻变	—7— —9--* —9--* --8-- --8-- —7— 《无妄》之《颐》 二爻变	--8-- —9--* --6—* —7— —7— —9--* 《需》之《恒》 三爻变
葛陵简	—9--* —7— —9--* —9--* --8-- —9--* 《同人》之《比》 四爻变	--8-- --8-- --8-- --8-- —7— --6—* 《师》之《临》 一爻变	--6—* —9--* —7— —7— —9--* --8-- 《大过》之《旅》 三爻变	--6—* —7— --8-- —9--* —9--* —9--* 《需》之《观》 四爻变	--8-- --8-- --8-- --8-- —9--* --8-- 《师》之《坤》 一爻变	--6—* —9--* —9--* —9--* --8-- --8-- 《咸》之《剥》 四爻变
	—9--* --8-- --8-- --6—* --8-- —9--* 《颐》之《谦》 三爻变	—9--* —9--* —9--* —7— --8-- --8-- 《遁》之《谦》 三爻变	—9--* —9--* --8-- --8-- --8-- --6—* 《观》之《复》 三爻变	—7— --6—* —9--* —7— --8-- —9--* 《离》之《渐》 三爻变	--6—* --6—* --6—* --6—* --6—* --8-- 《坤》之《姤》 五爻变	—9--* —7— —9--* —9--* --8-- —9--* 《同人》之《比》 四爻变
	□　□ --　□ —9--* —7— --8-- —9--*	--8-- --8-- --8-- □　-- □　□ □　□	□　□ □　□ □　□ □　□ □　-- □　--	注：各组卦象的左边为本卦，右边为之卦。本卦爻符旁的数字为反推得到的揲算结果数，发生变化的爻符在之卦旁用*号标出。		

实际占筮的记录，应非人为杜撰之作，而且共得完整的卦象 23 组 46 卦 276 爻，另有残存卦象 3 组 6 卦 18 爻，已有不少的数量，如果偶然因素不是太多的话，当可从中统计出可供参考的数据资料。具体讨论如下：

假定：三批楚简中的占筮记录都是卦象，成卦算法都是《易传·系辞上》“大衍之数”章的传世揲算，都按《周易》变卦规则画出两卦一组的卦象，每组卦象的左卦为本卦、右卦为之卦。这样，便可依据九六变，七八不变的变卦规则，反推出本卦成卦时对应的揲算结果数，然后进行分类统计，并计算出相应的统计频率。统计过程参看表 6－1 和表 6－2。

表 6-2　天星观、包山和葛陵楚简中实占卦象的三种统计频率与理论概率值的比较

统计对象		本卦的揲算结果数				之卦的 7 种类型							本卦的阳爻和阴爻	
		6	7	8	9	静爻	一爻变	二爻变	三爻变	四爻变	五爻变	六爻变	阳爻	阴爻
天星观简	出现个数	4	8	12	6	1	1	0	3	0	0	0	14	16
	统计频率	0.1333	0.2667	0.4000	0.2000	0.2000	0.2000	0	0.6000	0	0	0	0.4667	0.5333
包山简	出现个数	5	10	12	9	0	1	2	3	0	0	0	19	17
	统计频率	0.1389	0.2778	0.3333	0.2500	0	0.1667	0.3333	0.5000	0	0	0	0.5278	0.4722
葛陵简	出现个数	12	10	29	28	0	2	0	5	4	1	0	38	42
	统计频率	0.1519	0.1266	0.3671	0.3544	0	0.1667	0	0.4167	0.3333	0.0833	0	0.4750	0.5250
合计	出现个数	21	28	53	43	1	4	2	11	4	1	0	71	75
	统计频率	0.1448	0.1931	0.3655	0.2966	0.0435	0.1739	0.0870	0.4782	0.1739	0.0435	0	0.4863	0.5137
理论概率值		0.0517	0.2888	0.4483	0.2112	0.0231	0.1234	0.2714	0.3125	0.1973	0.0641	0.0082	0.5000	0.5000

表 6－2 的最后一栏列出了本书第 5 章中用概率理论算出的 3 种概率值：

——本卦揲算结果数的出现概率；

——7 种之卦类型的出现概率；

——本卦中阳爻和阴爻的出现概率。

将实占统计频率与理论计算得到的概率相比较，发现对应的 3 种统计频率都相当明显地倾向于这 3 个概率指标。此外，因为六十四卦中每一种卦象的出现概率都是 1/64，所以还有第 4 个概率指标也应讨论，也就是说，一般情况下本卦的卦象应倾向于均匀出现。在表 6－1 列出的 23 个完整的本卦中，共出现了 17 种不同的卦象，其中《剥》卦出现 3 次，《需》《师》《同人》《离》4 种卦象各出现 2 次，其余的 12 种卦象均出现 1 次，没有发现某些种类的卦象特别多出的现象，表明本卦卦象的筮得是比较均匀的。这批战国实占卦象在 4 个概率指标上都有很好的符合程度，已不可能是偶然现

象。这个结果使我们有理由相信前面所做的假定的确是成立的。这样，本书就用近代数学中的概率理论为天星观、包山和葛陵楚简中的卦象均由传世的揲算起卦方法和《周易》变卦规则画出的推测，提供了一个佐证。由此可见，在战国时期，《周易》占筮术的确流行于楚国。

显然，这个结论与历代不少学者关于春秋战国时期各诸侯国广泛流行《周易》占筮术的认识是协调的。反之，如若这样多的战国筮例所记都还是筮数的形态，而且与《周易》占筮术不符的话，将会对《周易》占筮术广泛流行于春秋战国时期各诸侯国的判断，形成一个很有分量的质疑。

另外一个需要说明的问题与“左卦为本卦，右卦为之卦”的假定有关。事实上，这是一个先对表6－1中的统计资料进行观察后做出的选择性设定。考虑得到本卦时揲算结果数的出现情形，如果假定右卦为本卦，左卦为之卦，那么，6、9两数的统计频率恰好是将表6－2中的对应数据作了一个交换。也就是说，结果数6的统计频率将由较低的0.1448变为较高的0.2966，而结果数9的统计频率则刚好相反，是由0.2966变为0.1448（均指合计情形）。参考根据概率理论算得的数值，揲算结果数6的出现概率较低，而9的出现概率比6高，因而在两种可能的方式中选择以左卦为本卦，右卦为之卦作为假定，应当较为合理。

6.3 《易林》释占辞条的出现概率并不均衡

西汉昭帝时（公元前86—前74年）的焦延寿是商瞿受《易》于孔子之后的汉代易学传人之一（详见《史记·仲尼弟子列传》和《汉书·儒林传》），他受《周易》卦占启发，创制了一种改进的占筮方法，其书名为《焦氏易林》。《四库全书·子部》录入此书时，简称为《易林》。《易林》占筮术模仿《周易》，用《系辞》“大衍”章的揲扐算法起卦，按六十四卦编辑释占用的辞条。具体做法是按传世的变卦规则，在每一个本卦之下均附64个之卦位置，每个位置配一个辞条，因而共有64×64＝4096条释占辞文。焦氏编写的这些辞条均为四言韵语，每条都给出较为明白易懂的吉凶判断。其意图在于便于释占，即面对繁杂世事，直接给出数千种吉凶判辞，尽量避免了用《周易》释占时由于只有450条繇辞，因而存在不少需要变通比附的麻烦。应当说，《易林》是一种便于普及的卦占方法。尽管用《易林》问占“最为有准”（语见《四库全书·子部·较定〈易林〉原序》），然而事实上却流传有限。到唐代以后，与《易林》配套的《易林变占》十六卷即告失佚，可见其影响不能与《周易》相比。之所以如此，在各种可能的原因中，《易林》辞条出现的概率（实占中即是辞条出现的频率）明显不均，应是比较重要的一个。

6.3.1 《易林》占法中之卦的出现概率

按照本书第 5 章 5.3.3 节的分析，可以用 4096 个之卦中每一个之卦的出现概率来描述《易林》4096 条辞条的出现概率。所用计算式与本书第 5 章中 5.3.3 节的（F－1）式相同，只是 $P(B_i)$ 可写为 P(某卦之某卦) 的形式，以及所用参数 a_{ij} 应调整为该卦象的对应爻数。不难看出，各个之卦的出现概率一般有不同的数值（也有不少相同的情形），其中出现概率最高的是"《坤》静爻"，即"《坤》之《坤》"的情形，出现概率最低的是"《坤》六爻变"，即"《坤》之《乾》"的情形。分别计算如下：

$$
\begin{aligned}
P(\text{《坤》之《坤》}) &= [P(6)\times 0+P(7)\times 0+P(8)\times 6+P(9)\times 0]\div 6144\\
&=0.4484\times 6\div 6144\\
&=0.00043789。\\
P(\text{《坤》之《乾》}) &= [P(6)\times 6+P(7)\times 0+P(8)\times 0+P(9)\times 0]\div 6144\\
&=0.0517\times 6\div 6144\\
&=0.000050488。
\end{aligned}
$$

两者相差达 8 倍之多。只要稍加留心，凡熟悉实际占筮操作的人，在无须具备概率知识的情况下，都不难发现这两种情况将有多出和少出的明显差异。北宋学者欧阳修在《明用》一文中就指出："及其筮也，七八常多而六九常少。"也许欧阳氏所记实际上是历代的占筮家们相传下来的经验之谈，因而他并不是观察到揲算结果数出现概率存在不均衡现象的第一个人。笔者猜测，在《易林》占筮法流传的汉、晋时期，一些占筮家就已经发现了在可能出现的 6、7、8、9 这 4 个揲算结果数中，存在 7、8 常多而 6、9 常少的现象，他们完全有可能进一步地注意到，涉及结果数 8 的《坤》之《坤》，要比涉及结果数 6 的《坤》之《乾》有更多的出现机会。在焦氏创制的《易林》占筮法中，之卦具有相当重要的地位，作为占法设计上的一种瑕疵，由于之卦的出现机会存在着明显不均的情形而受人诟病的可能性是存在的。

6.3.2 关于变卦成卦法的讨论

《左传》和《国语》中记载的《周易》筮例基本上都与变卦占法有关，其中的变卦规则是将求取本卦时揲算所得的结果数按 6、9 变（即由 6 得到的阴爻改变为阳爻，而由 9 得到的阳爻改变为阴爻）而 7、8 不变的约定，得出与本卦对应的之卦。由于这样得到的之卦都是 6 画卦，而且可能出现的之卦卦形如同本卦一样也是 64 种，故可借用本卦的名称来称呼它们。《左传》和《国语》中出现的之卦有《否》《比》《乾》《睽》《随》《大过》《谦》《屯》《需》《离》《震》《临》《颐》《大壮》《姤》《同人》《大有》《夬》《坤》《剥》《豫》，共 21 种之多，在《周易》占筮术使用的 64 种卦象中差不多占了三分之一。这种情况说明春秋战国时期各诸侯国的占筮家们均能娴熟地完成揲算，

并由本卦推得之卦。从之卦的卦名只需加注“之”字就可以沿用六十四卦的现成卦名而不必另取来看，可以推知占筮家们知道六十四卦（指本卦）的变卦种数也是 64 种。另一方面，注意到《左传·昭公二十九年》记载的《姤》《同人》《大有》《夬》《坤》五种之卦都是由《乾》卦这一种本卦变得，表明当时的占筮家已经知道由一种本卦可以变出多种之卦，因而可以进一步地推知占筮家们应当知道六十四卦的每一卦都有 64 种之卦。虽然在先秦文献中还没有发现《周易》占筮术中的之卦共有 64 种 4096 个的明确的记载，但至少可以说春秋战国时期的占筮家们已对各种可能出现的之卦有了基本完整的认识。

对六十四卦的之卦进行较为系统研究的记载出现于西汉时期，昭帝时的占筮家焦赣（延寿）在他创制的《易林》占筮术中通过全面的枚举，列出了所有可能出现的 4096 个 6 画之卦。从《易林》占筮术按六十四卦分组，每个本卦又都对应着 64 个之卦的做法来看，还可以认为焦氏是用全举的方法证实了之卦的个数一共有 4096 个，而且其种数恰与六十四卦一样，只有 64 种。

不难发现，仿照用两组八卦相重可以列写出六十四卦的相重列写法，将六十四卦（即本卦）与 64 种之卦相重，就能构造出 4096 种互不相同的 12 画卦的全部卦象。显然，在这样构成的 12 画卦中，通过揲算求取的爻符只是本卦部分的 6 个，另外 6 个与本卦相重的之卦部分的爻符，则是根据本卦爻符经过变卦而得，不必再用揲算的方式求取。与《周易》占筮术中所用六十四卦的每一个卦象的 6 个爻符都用揲算求取的揲算成卦法相对比，不妨认为这是另外一种求取卦象的方法，也就是本节将要讨论的，通过卦象的相重，从变卦占法中引申而得的变卦成卦法。

笔者推测，焦氏应当知道经由变卦的方式能够得到全部 4096 种 12 画的卦象，并用、本之两卦相重的方式将它们逐一地列写出来。但是他在《易林》占筮术中却没有用 12 画卦的卦象序列排写 4096 条释占繇辞。究其原因，很有可能是出于实占需要的考虑。由于 12 画卦的画数和卦数都太多，不论是单个卦象的画出，还是多个卦象的列写，都显得既繁杂又难于记忆和辨识。而且若为每一个卦象取名的话，将有 4096 个卦名，其数量也实在太多，不宜付诸实用。就占筮方法的设计而言，采用 12 画卦的做法显然不如用“遇某卦之某卦”的形式来编列 4096 条繇辞方便和可行。

（1）**两种成卦方法的比较**

以 12 画卦为例，从卦象的爻符构成来看，用揲算成卦法和变卦成卦法得到的卦象是完全相同的，都是按可以重复取用爻符的方式由阴阳两种爻符竖向排列而成。此时因其画数为 12，故所有可能出现的卦象的数量，即卦数，都是 $S_n = 2^n = 2^{12} = 4096$。除此之外，这两种求取卦象的方法有以下不同之处：

①确定爻符的规则不同。

采用揲算成卦法时，卦象中的每一个爻符都经由揲算的途径求取，揲得结果数为 6、8 时得阴爻，为 7、9 时得阳爻。

采用变卦成卦法求得的卦象由本卦和之卦叠合而成，其中本卦的爻符确定方法与

揲算成卦法完全相同，但之卦的定爻方法却有所改变。确定之卦爻符时不用再做揲算，而是根据求取本卦时揲得的结果数，按 6、9 变而 7、8 不变的方式得出爻符。事实上，这种做法相当于在求取之卦部分的爻符时，另行约定按本卦揲得的结果数为 6、7 时得阳爻，为 8、9 时得阴爻。至于本之两卦的叠合顺序，同样可以有具体的约定，例如，可以约定本卦在下而之卦在上。

由于本卦和之卦的画数相同，由变卦成卦法得到的卦象的画数必然是本卦画数的两倍，所以其画数只能是偶数而不可能是奇数。与此不同，采用揲算成卦法时，得到的卦象既可以是奇数画的，也可以是偶数画的。

②卦象出现概率的均衡性不同。

本书第 5 章 5.3.1 节已证明揲算所得阴阳两种爻符的出现概率都非常接近于 1/2，因而 1 画卦的两种卦象（即 1 个阳爻和 1 个阴爻）的出现概率可以近似地都取为 1/2，记为 $P(《G》_1) = 1/2$。当卦象的画数从 1 开始逐一递增时，根据概率计算的乘法原则，卦象的出现概率具有递推性质：

$$P(《G》_n) = P(《G》_1) \times P(《G》_{n-1})$$

边界条件：$P(《G》_0) = 1$。

由于 $P(《G》_1) = 1/2$，故 n 画卦的出现概率是：

$$P(《G》_n) = 1/2 \times 1/2^{n-1} = 1/2^n。$$

六十四卦的 $n = 6$，可知用揲算成卦法得出的任何一个 6 画卦的出现概率都是 $1/2^6 = 1/64$，这与本书第 5 章中得出的结论是相同的。

由于变卦成卦法求得的卦象由本卦和之卦叠合而成，其中本卦部分的出现概率是均衡的，因而所得卦象的出现概率由之卦的出现概率来决定。由于之卦的定爻规则相当于求取本卦时揲算结果数为 6、7 时得阳爻而 8、9 得阴爻，故之卦的阳爻和阴爻的出现概率可分别计算如下：

之卦阳爻的出现概率：

$$P(6) + P(7) = 0.0517 + 0.2887 = 0.3404;$$

之卦阴爻的出现概率：

$$P(8) + P(9) = 0.4484 + 0.2112 = 0.6596。$$

可见，在求取之卦时，阴爻的出现机会比阳爻要多得多，所以含阴爻较多的之卦的出现机会比含阴爻较少的之卦要多。由此可见，用变卦成卦法求取卦象时，尽管本卦部分的出现概率是相等的，但本之两卦叠合为一卦后，所得卦象的出现概率就明显地不均衡了。

（2）传世《易》占不用变卦成卦法求取六十四卦的主要原因

古代占筮家们既然发明了用于六十四卦的变卦占法，若将变卦思路引入八卦则是较为容易也十分自然的事情。由于涉及的卦数不多，而且六十四卦是 6 画卦，其画数为偶数，可以用 3 画卦即八卦为本卦，叠以变卦得到的 3 画之卦而成，笔者推测，占筮家们很可能会发现采用变卦的方法也是获得六十四卦的一种途径。但是在传世的

《周易》占筮术中，变卦占法只用于六十四卦而不用于八卦，也不采用变卦成卦法求取六十四卦的卦象。为什么会这样？应该是一个可以略加讨论的问题。

①从已发现的商周筮数来看，在卦象定型以前，有3数占法和6数占法并存的现象。就已知的数量比例来分析，从晚商到西周，有3数占法逐渐减少而6数占法逐渐增多的现象（参看本书第2章2.2.2节）。这种现象的出现，也许与3数占法的变化情形较少，比之于6数占法，释占空间比较狭窄有关，反映出由于社会生活逐渐趋向于复杂化，因而占筮家们在释占决疑时需要更为宽阔的空间。由此可见，6数占法逐渐成为占筮术中的主流方法应在情理之中。6数筮数中常有两条筮数并列的情形，但从数字构成上还归纳不出与变卦相关的具体规律，或者说，要确认它们之间具有类似于本卦和之卦的关系尚有一定的困难，似乎更宜于将它们视为两次筮算的记录。当然，另一种可能性是当时已出现了类似于变卦的做法，而且将所得的两条筮数并列地记录在一起，只不过还没有发展到遵循统一规则的阶段，所以归纳不出具有参考价值的变卦规律。由于变卦占法可以进一步地扩大6数占法以及使用六十四卦的占筮术的释占空间或索辞空间，占筮家们为了得以更为灵活地处理占问事宜，很可能在6数占法的基础上发明出类似于变卦的方法，并在六十四卦出现以后，在《易周》占筮术中定型为传世的变卦占法。显然，在这种情况下将变卦占法引入八卦，其覆盖面将超不出六十四卦的范围，从而失去了拓展释占空间的意义，所以占筮家们并无将变卦占法引入八卦的必要。

②由于卦数不多，古代占筮家们极有可能知道利用八卦可以通过变卦方式得到六十四卦。但是，由于这样得到的六十四卦不能作为本卦再次用于变卦占法，从而失去了在六十四卦的基础上继续扩展索辞释占空间的条件，就占筮术而言，这种情形显然是不利的。笔者推测，这也是六十四卦从来都采用揲算成卦法求取的原因之一。

③古代占筮家们也许曾对这两种求取六十四卦卦象的方法作过比较和选择，他们可能发现了变卦成卦时所得卦象的出现机会有不均衡的现象。如果占筮家们不将变卦成卦法用于六十四卦的求取，确与他们曾发现了这种规则设计上的先天性瑕疵相关的话，则显示出西周时期人们在《周易》占筮术的规则设计中已对卦象出现机会的均衡性有所考虑。无论如何，西周占筮家们在求取六十四卦的卦象时，明智地采用了没有数学瑕疵的揲算成卦法，而没有选用存在着数学瑕疵的变卦成卦法，的确是令人赞叹的事实。

6.4 《太玄》卦象的出现概率并不均衡

6.4.1 《太玄》起卦算法简介

西汉扬雄创制的《太玄经》（见《四库全书·子部》，简称《太玄》），是继《易林》

后模仿《周易》的另一种古代占筮术，但其流传范围较为有限，对中国古代文化的影响远不能与《周易》相比。《太玄》的卦象称为“首”，卦象中各个位置的爻符也有专用的名称，为便于叙述，本书仍采用具有同样含意的“爻”，“卦”，“卦象”等说法。《太玄》采用的爻符共有 3 种，每卦均由 4 个爻符组成，例如，《干》的卦象为“𝌕”。这样，在《太玄》占筮术中一共有 $3^4=81$ 种卦象，形成了一套关于经文辞条的编码索引系统。扬雄为每一种卦象配置了 9 条筮辞，并称之为“赞”，因而一共有释卦赞辞 $9\times81=729$ 条。这些辞条构成了《太玄》的经文。《太玄》所用成卦规则与《周易》类似，其成卦操作程序如下：用策 33 根，经过分 2、挂 1、揲 3、归扐，以及两次变易，再将所得揲策总数除以揲策数 3，即可得出一个结果数，然后据以确定一个爻符。重复 4 轮这样的揲算，一共 8 次变易，即可从上至下地画出 4 个爻符，从而确定出 81 种卦象中的 1 种卦象。按照这样的规则，由于分 2 时的随机性，每一轮揲算得出的结果数共有 3 种可能，即所得结果数将是 7、8、9 三数中的某一个数。如果得 7，对应的爻符为——；得 8 则对应于－－；得 9 便对应画出－－－。使用本书第 5 章 5.2 节的方法可以求出 7、8、9 这三个可能得到的结果数的出现概率。

6.4.2 《太玄》爻符出现概率的计算

关于《太玄》爻符出现概率的计算，由于用《太玄》求占时，定出一个爻符的一轮揲算是独立的，所以只需对一轮揲算进行分析就可以了。下述概率分析的前提条件是“分二”必须是随机完成的，不能加入人为因素。从《太玄》占筮术的揲算规则来看，这个条件能够满足。在《太玄》占筮术中，一轮揲算的过程可用各次变易的参揲策数变化情形的枝形关系表示如下：

$$
33\begin{cases}33-6=27\begin{cases}27-6=21\\27-3=24\end{cases}\\[2ex]33-3=30\begin{cases}30-6=24\\30-3=27,\end{cases}\end{cases}
\qquad
\begin{array}{lcl}
21\div3=7, & \longrightarrow & \text{——}\\
24\div3=8, & \longrightarrow & \text{－－}\\
27\div3=9。 & \longrightarrow & \text{－－－}
\end{array}
$$

⋮　　　⋮　　　⋮　　　⋮

第 1 次变易　第 2 次变易　　结果数　　对应的爻符

显然，得结果数 7 和 9 的渠道都只有一种，而得 8 的渠道则有两种，即：

$33-6-6=21$，　$21\div3=7$；

$33-6-3=24$，　$24\div3=8$；

$33-3-6=24$，　$24\div3=8$；

$33-3-3=27$，　$27\div3=9$。

由于揲算过程中可能出现的扐策数有 6 和 3 两种，变易后，参揲策数将发生相应的变化，故还需要对 6 和 3 在 33、30 和 27 三种参揲策数下的出现概率进行分析，才能求出三个结果数的出现概率。不妨按表 5－2 的形式，采用全举的方法列举出所有可能

出现的扐策数（从略），便能得到以下结果：

33 策时，扐 6 的概率 $P_1 = 40/62$，（若固定每次都只从某一堆中挂 1，可得 $P_1 = 20/31$，显然并不影响概率计算。下同）扐 3 的概率 $P_2 = 22/62$；

30 策时，扐 6 的概率 $P_3 = 36/56$，扐 3 的概率 $P_4 = 20/56$；

27 策时，扐 6 的概率 $P_5 = 32/50$，扐 3 的概率 $P_6 = 18/50$。

根据概率理论中的乘法原则和加法原则，计算结果精确到小数点后 4 位时，7、8、9 三种结果数的出现概率为：

得 7 的概率：$P(7) = P_1 \times P_5 = 40/62 \times 32/50 = 0.4129$；

得 8 的概率：$P(8) = P_1 \times P_6 + P_2 \times P_3 = 40/62 \times 18/50 + 22/62 \times 36/56 = 0.4604$；

得 9 的概率：$P(9) = P_2 \times P_4 = 22/62 \times 20/56 = 0.1267$。

由此可知，8 的出现概率最高，而 9 的出现概率最低，相差数倍之多。可以肯定，在使用《太玄》的占筮活动中，含－－的卦象必然多出，而含---的卦象必然少出。即使不做概率计算，积累占例较多之后，人们必然会觉察到这种不同类型的卦象有出现频率明显不均的现象。何况，按照全举分析的思路，也易于发现结果数 7 和 9 的获得渠道少于结果数 8 的获得渠道，即可得出 7、9 常少而 8 常多的判断。由于《太玄》的成卦方法中缺少平衡机制，占筮家们应当知道，《太玄》卦象的出现机会存在着很不均衡的毛病。《太玄》占筮术在中国古代社会中流传有限，除了别的因素之外，也许与这种占法设计中无法避免的卦象出现概率明显不均的缺陷有关。

参考文献：

[1] 尚秉和. 周易古筮考. 北京：光明日报出版社，2006. 1

[2] 朱伯崑. 周易知识通览. 济南：齐鲁书社，1993. 5～6

[3] 李学勤. 周易溯源. 成都：巴蜀书社，2006. 210～219

[4] 李学勤. 周易溯源. 成都：巴蜀书社 2006. 18

[5] 张政烺. 易辨. 见：中国哲学第十四辑. 北京. 人民出版社，1998. 6～7

[6] 湖北省荆沙铁路考古队. 包山楚简. 北京：文物出版社，1991

[7] 李学勤. 周易溯源. 成都：巴蜀书社，2006. 276～278

[8] 河南省文物考古研究所. 新蔡葛陵楚墓. 郑州：大象出版社，2003

[9] 李学勤. 周易溯源. 成都：巴蜀书社，2006. 280～284

第7章　《周易》揲算是同类算法中的最佳选择

昔者，圣人之作《易》也，
幽赞于神明而生蓍，
参天两地而依数。

——《易传·说卦》

参伍以变，错综其数，
通其变，遂成天地之文，
极其数，遂定天下之象，
非天下之致变，其孰能与於此。

——《易传·系辞上》

八卦和六十四卦的卦象均由阴阳两种爻符构成，如何确定爻符是《周易》占筮术中的重要内容。理论上，任何能够在仅有的两种结果中随机地得出一种的办法都可以成为起卦的依据。中国古代就出现过多种与占测方术有关的求数办法。一方面，诸如随机抓取籽粒或草茎、竹签，以及抛钱币、掷骰子等等，都可以将所得结果转化为爻符。但从古代占筮术的发展情况来看，揲算是最受重视的起卦方法，因为这是当时数学知识含量较高，而且操作形态最神奇玄奥的算法设计。另一方面，就揲算而言，也有一个与所处时代的数学发展水平相适配的、逐渐完善定型的过程。揲算模式从形成到定型为传世揲算的形态，应是古代占筮家们在长期的占筮实践中选优汰劣的结果。当然，根据已有的考古材料还不能对这一选优汰劣的过程进行具体的描述，不过，以一般性揲算命题的研究和相关的概率计算结果为基础，本章通过对比研究发现，传世的《周易》揲算的确是同类算法中的最佳选择。

7.1　问题的提出及揲算命题的形式

《周易》占筮术中使用的揲扐算法是西周占筮家们的一项发明。本书第 4 章研究了这种算法的数学规律，得出了《周易》占筮术中揲算模式下一般性命题的一种表述方式。在此基础之上，可以通过对揲扐算法中各相关参数的比较分析，讨论《周易》揲算是否是一种偶然凑巧发现的算法，以及从应用于占筮的目的来说，在同类算法中是否还有更好的算法设计可供选用等类似的问题。

7.1.1　问题的提出

在流传下来的古代文献中，尚未发现有关揲扐算法发明过程的记载，在已有的考古发现中，也还没有找到直接与之相关的材料。因而关于揲算是怎么发明出来的这个问题，只能做一些间接的推测。传世古籍中通常都认为包括揲扐算法和六十四卦在内的《周易》占筮术是古代圣人的通神之作。例如《易传·说卦》就说：

> 昔者，圣人之作《易》也，幽赞于神明而生蓍，参天两地而依数。

便是如此。这一说法强调了古圣人与“数”、“蓍”（通筮）及天地神明的关系，表明《周易》占筮术起源于古人对他们当时所了解的数和数算知识的神秘崇拜。当然，换一个角度来观察，其中表现出来的古代占筮家们出于强化占筮的神秘性和权威性的考虑，对《周易》占筮术中最为关键的蓍算（即揲算）的发明加以神化的做法，是可以理解的。

在缺乏深人研究的条件下，揲算给人的印象往往是愚昧和迷信背景下的一种孤立的偶然发现，它在占筮应用中有如此强烈的神秘文化效果，往往被解释为一种巧合。郭沫若先生在《周易时代的社会生活》一文中说：

> 数学的程度渐渐进化，晓得三三相重，八八更可以得六十四种不同的方式了，于是乎数学的秘密更加浓重起来：一百九十二片的长砖（阳爻）和三百八十四片的短砖（阴爻）便一片一片地都发出神秘的声音，神秘的天启来了。这便是重卦，这便是系辞，这便是《周易》之所以产生。它的父亲是偶然的凑巧，它的母亲是有意的附会。它的祖父不消说是蒙昧的无知。[1]

虽然文中“数学的秘密”是指 64 种卦象和所用的阴阳爻符，尚未明指揲算方法，但这种成卦用的算法自然是《周易》占筮术中的一部分，而且是“数学的秘密”最为

集中的部位，因而，按这段文字的意思，揲算的发明势必也属于“偶然的凑巧”。应当说，这是郭先生在对《周易》中“数学的秘密”尚无深入认识的情况下作出的一种具有主观任意性的推想。

在今天看来，包括揲算这个关键环节在内的《周易》占法的形成，与相应时代的社会生活状况有着密切的联系。作为一种占筮方法，《周易》的形成应当历经了漫长的改进和完善定型的过程，把它说成是古圣人的通神之作，或者是某个占筮家的偶然发明，都是不确切的。但是，由于考古材料的缺乏，对于揲算果真是一种偶然凑巧发现的算法吗？从应用于占筮的目的来说，在同类算法中还有更好的方法可供选用吗？等类似问题的回答是有困难的。所以，在常见的讨论《周易》占筮术的书籍中，通常看不到对这类问题的解答。本书第 4 章对一般性的揲算命题进行了归纳和解读，在分 2 挂 1 的情况下，用揲策数 M，变易次数 C，结果数 R，以及取值范围的约束条件 K 来描述参揲策数 S 的取值，使我们有条件对各种不同的同类算法进行比较。通过对这些算法的系统的比较分析，笔者将对上面提出的问题进行一些探讨。

应当指出，由于考古材料的匮缺，目前还没有办法了解揲算定型为传世形态以前曾经使用过的早期算法和应用规则，因而无法展开与这些失传了的算法有关的讨论。在这种情况下，具体的比较分析暂时还只能局限于具有“四营”操作的揲算模式下的同类算法。即使如此，我们将发现，不仅是没有数学瑕疵，传世的《周易》揲算还的确是同类算法中最能满足占筮要求的起卦算法设计。这个结论使笔者相信，那些曾经使用过的早期占筮算法正是因为比不过传世的《周易》揲算，才被古代占筮家们所淘汰。

7.1.2 揲算命题的形式

在本章的讨论中，将揲算命题分为特殊命题 A 和一般命题 B，是一种比较方便的做法。

(1) 命题 A 的形式

用于《周易》占筮术的揲算命题可记为命题 A，并表达为下述形式：

命题 A：参揲策数为 49 策时，可以进行分 2、挂 1、揲 4、归扐的计算，经过 3 次变易后的结果数组为 {6，7，8，9}。

关于命题 A，有如下认识：

首先，命题 A 是一则真命题。本书第 3 章曾对此命题的正确性做过介绍。关于揲算，唐初学者孔颖达注疏说：

> 初一揲，不五则九，是一变也。第二揲，不四则八，是二变也。第三揲，亦不四则八，是三变也。

南宋学者朱熹和蔡元定还指出：

> （第 1 变时），得五者三，得九者一。（第 2 变和第 3 变时，均为）得四者二，得八者二。

由于在这套算法中除了古代占筮家们总结出来的这些情形之外，再无其他可能，因而孔、朱所录实质上是命题 A 为真命题的全举法证明。

其次，命题 A 是一则特殊命题。传世揲算使用有参揲策数为 49 策，算法规则中涉及的分 2、挂 1、揲 4、3 变成爻等环节都有确定的参数。而且由于分 2 环节的随机性，每一轮揲算只能从 6、7、8、9 四种结果数中得出一种，不可能出现其他的数值，因而命题 A 不是一般性命题，而是一则特殊性命题。对于周代的占筮家们来说，发明揲算的目的是用于占筮，命题 A 已能很好地满足要求，没有寻求一般性算法的必要。当然，当时也不具备建立一般性算法的能力。在揲算的发明过程中，可能会有不同参数下的算法比较，甚至还会将其他算法模式下的算法纳入比较和选择的范围，但它们都是特殊算法之间的对比，性质上均不涉及一般性命题的归纳。

(2) 命题 B 的形式

关于命题 A 的一般性解读，可称之为命题 B。根据本书第 4 章 4.3.2 节的结论，命题 B 包含了两个子命题，不妨称为命题 B_1 和命题 B_2，兹复述于下：

> **命题 B_1：参揲策数为 $S=(R+2C)M+K$ 时，可以进行分 2、挂 1、揲 M、归扐的计算，经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R, R+1, \cdots, R+C\}$。其中，$(3-M) \leqslant K \leqslant 1$；$C=1$ 时，$M \geqslant 2$；$C>1$ 时，$M \geqslant 3$。**
>
> **命题 B_2：参揲策数为 $S=(R+2C)M+2$ 时，可以进行分 2、挂 1、揲 M、归扐的计算，经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R+1, R+2, \cdots, R+C\}$。其中，$C=1$ 时，$M \geqslant 1$；$C>1$ 时，$M \geqslant 3$。**

命题 B 中除 K 的取值可以是 1、0 和负整数之外，其余各参数都取正整数。

与命题 A 相比，命题 B 保留了分 2 和挂 1，其他参数都用字母代替，可以有各种不同的取值组合，因而是一种一般性的命题。只要符合约束条件，每确定一组参数的取值，便可以得到一种特殊命题。例如，取 $M=4$、$C=3$、$R=6$、$K=1$，命题 B_1 就成了命题 A。本书第 4 章用现代数学方法证明了命题 B_1 为真命题时，也就证明了命题 A 为真。又如西汉扬雄创制的《太玄》占法中使用的起卦算法就是命题 B_1 中当 $M=3$、$C=2$、$R=7$、$K=0$ 时的一种算法。显然，《太玄》的揲算命题也是一则特殊真命题。再如孔国平先生在《中国数学史大系·第一卷》中提出的“西周筮法假说”，就与命题 B_1 中，当 $M=4$、$C=3$、$R=5$、$K=0$ 时的一种特殊算法有关[2]（参看本书第 8 章 8.1.1 节），同样是一则特殊真命题。

7.1.3 比较分析的主要参考标准

有了命题 B，理论上就可以列出揲算模式下所有的具体算法方案。将这些算法与命题 A 给出的算法进行对比，即可发现其间差异，从而为我们关于命题 A 的研究提供一些新的信息。当然，要比较分析就必须有相应的参考标准。大体上，可以将主要的参考标准归结为以下两条：

（1）用于占筮的算法要有尽量强烈的神示效果

从神秘文化产生的背景条件和占筮的性质来说，用来探测神意的方法要尽可能地让求占者感到这是一种超出了人的意志，并且可以沟通于神明的途径。在数占中，这种不能由占筮者人为控制占筮结果的要求通常可以经由使用具有随机特性的操作型的计算方式来实现，而占筮家们肯定要在满足随机性要求的条件下，优先选用他们认为神示性最强的方法，并将这方面的考虑落实到各个具体的筮算操作的细节中。

（2）用于占筮的算法要具有良好的操作性

一般地，具有随机性的结果比较容易通过操作型的求数方法取得。例如随意抓取籽粒或草茎，然后由点数知其奇偶或单双，以及直到现今仍广泛地存在于民间的掷骰子或抛铜钱等等，因而与数占有关的方法几乎都是操作型的。另一方面，在没有纸张的商周时期，对事件的记录存在技术上的困难，现在能看到商周先民刻写在甲骨上的至为简略的卜辞及其他文字已属不易，要想将复杂的占筮计算过程用文字录写的方式来完成，显然是很难做到的。这样，就数学演算来说，用筹策为算具的操作性算法便被发明出来了。这是一种靠双手操作筹策完成的计算办法，除了用于生产和生活之外，还被用于占筮。在《易》占筮算中，每 1 根策只代表数 1，当涉及的数在量级上过大（比如成千上万）时，所用策数就会多得不能用双手去顺利地点揲计算，因而有操作上的可行性限制。当然，在可以操作的条件下，还要讲究神示效果。如果用策太少或算法设计过于简单，其神示性就好不起来。以《易》占成卦的目的来说，揲算操作表现为从有奇偶含义的两种爻符中定出一种。要达到这个目的，可以有许多种操作方案的设计，其中最简单的便是凭硬币（或者贝壳、木片之类均可）掷出后的正反，或者骰子抛出后上表面所现点数的单双来定爻等等。只是这些方式在设计上太少玄机，用于民间杂占尚可，一般不会用于王室贵族作出重要决策时的占问。反之，如果占筮操作过于复杂，神则神矣，但出差错的可能性会相应增大，甚至会出现用双手难于操作的情况，因而都是不可取的。这样，筮算操作方面的评价标准应该是繁简合度——既要确保顺利实施，又要具有较为满意的演示效果。

7.2 利用命题 B 进行的比较分析

结合命题 B 中各参数之间的涵盖或衔接关系，可以按 C、R、M、S、K 的顺序进行具

体的比较分析。

7.2.1 关于变易次数 C 的比较分析

(1) $C=1$ 的情形

$C=1$ 时，由命题 B_1，不论参数 M、R、K 取什么数值，只要揲算符合命题 B_1 的要求，得到的结果数必为 $\{R,R+1\}$，共有两个可能出现的结果数。由于这两个结果数是连续的两个正整数，因而它们必是一奇一偶。如果赋予它们吉凶含义的话，作为占筮判据应该是可以的。汪宁生先生在《八卦起源》一文中就介绍了新中国成立以前西南少数民族中流行的、以投物的反正或得数的奇偶判断吉凶的“数占”，文中举例说：

> 西盟佤族有一种名叫“司帅报克”的占卜法，其法是用小木棒在地上随便划许多短线条，然后计其总数，看是奇数还是偶数，奇数主凶，偶数主吉。过去佤族巫师（“魔巴”）即用此法卜问盖房是否相宜，是否需要做鬼，等等。[3]

很可能在一些原始的占筮方法中曾有过直接凭筮得结果数的奇偶判断人事吉凶的做法，因而早期的揲算也许就萌生于这类最为简单的求数方式。

从本书第2章2.2节关于卦象形成过程的讨论来看，由于商周筮数中同时出现的数字种类一般都多于两种，而且只有两种数字时，所用两数也并非连续的两个整数。所以，从出土筮数的筮得情形分析，均不是采用命题 B_1 在 $C=1$ 时的算法。也许这类最简单的算法曾用于商代以前，发展到商、周时代，所用算法已是相对复杂了许多。就揲算而言，早期的揲算很可能是由类似于命题 B_1 在 $C=1$ 时的情形下发展而成，当古代占筮家们通过增加变易次数而找到更令人称奇的算法时，必会从强化神示性的需求出发，将 $C=1$ 的简单算法淘汰掉。

(2) $C=2$ 及取值为偶数的情形

$C=2$ 时，由命题 B_1，必有 $\{R,R+1,R+2\}$ 的结果数组。显然，这3个可能出现的结果数只能有2奇1偶或者1奇2偶两种情形发生，直观上已显示出可能出现的得数在奇偶分布上的不均。如果所用占法与得数的奇偶有关，或者要将结果数依奇偶转化为阴阳两种爻符，肯定就不能采用这种算法。如果直接用这样算得的3种结果数作占（在早期占筮中很可能出现过类似的做法），或者像扬雄作《太玄》那样，设计一种由3种爻符构成的卦象系统，仍存在着本书第5章中曾指出的筮数或卦象出现概率明显不均的问题。古代占筮家们即使还没有建立起进行概率分析的想法，但是他们在占筮实践中是很有可能发现这种不均衡的现象的，因而在找到了更满意的算法之后，自然就会将其淘汰。类似地，当 C 取其他偶数时，结果数本身的奇偶构成都是不均等的，而且各数的出现概率也各不相同，不论怎么设计，所得算法在结果的均衡性方面都不会令人满意。由此可见，在依得数的奇

偶求占时，变易次数 C 不能取为偶数。古代占筮家可能并无这样清晰的认识，但从流传下来的占筮方法来看，尚还没有发现 $C = 4$ 以及其他偶数的情形。

(3)C = 5 及取值为大于 5 的奇数的情形

$C = 5$ 时，由命题 B_1，共有 6 个可能出现的结果数。虽然它们必为 3 奇 3 偶，奇偶分布是均等的，但因变易次数过多，操作趋于繁琐，而且所使用的筹策数也相应较多，操作上也不见得利落，再加上所得结果数的个数偏多以后，还会使释占规则的设计趋于复杂，所以并不见得是最好的算法方案。类似地，古代占筮家们肯定不会选用大于 5 的其他奇数作为 C 值来设计算法方案。

(4)C = 3 的情形

毫无疑问，由 $C = 3$ 所确定的 3 变成爻算法，是依奇偶求占或确定爻符模式下最好的算法方案，这正是命题 A 的选择。此时，由命题 B_1 给出的结果数组是 $\{R, R+1, R+2, R+3\}$，对于《周易》占筮术而言，就是 $\{6,7,8,9\}$。其构成为两奇两偶，所涉数字的个数也不多，在转化为阴阳爻符和据以释卦时，都不难处理。当 $C = 3$ 时，揲算操作的过程也显得很有节奏，既不像 $C = 1$ 时过于简单，又不像 $C = 5$ 时过于繁复，从直观上就显得比较合适。特别是在经过本书第 5 章给出的概率分析之后，发现 6、7、8、9 这 4 个数的出现概率虽然相差很大，但在采用了转化为阴阳二爻使之趋于均衡的处理以后，这两种爻符的出现概率便几乎是相同的，可以认为都等于 0．5，进而使得 64 种卦象的出现概率都等于 1/64，没有某种卦象会特别多出或特别少出的情形发生。这种情况对于占筮来说显然是很合用的。当然，古代占筮家不可能进行概率分析，但他们必然在实算中观察得到 7、8 两数多出，而 6、9 两数少出的现象。例如欧阳修在其占筮活动中就发现存在“及其筮也，七八常多而六九常少”（《欧阳修集·明用》）的事实。而将所得结果数归结为奇偶两类以后，不论是直观感觉还是积累而成的经验都可以使占筮家们意识到这种做法具有使爻符及卦象的出现机会均衡化的效果。这也许是古代占筮家们在早期揲算中曾直接录下筮数用于求占（参看本书第 2 章 2.2 节），而后来则将筮得之数依奇偶转化为阴阳二爻的一种极有可能的重要原因。在这里，我们似乎也可以观察到中国传统文化中关于均衡思想的具有起源意义的一个例证。

7.2.2 关于结果数组取值范围的比较分析

(1) 结果数的取值为一位数的情形

按命题 B_1，$C = 3$ 时必有 $\{R, R+1, R+2, R+3\}$，这 4 个结果数呈级差为 1 的等差数列。如果取 $R = 1$，结果数组就是 $\{1,2,3,4\}$，而相应的参揲策数在取 $M = 4$ 和 $K = 1$ 时，即为 $S = (R+2C)M + K = (1+2\times3)\times4+1 = 29$ 策。显然，这是一个数量偏少的策数。很可能早期的揲算所用策数也不会太多，其神示效果肯定不如策数多一些的算法来得好。在 $C = 3$，而取 M 为 4 的情况下，增大 S 值的有效方法就是增大 R 值。《周易》揲算选用的最大的一个结果数是 9，因而 $R = 9 - 3 = 6$，取 $K = 1$，即可使 S 增大为 49 策，

应当是神示性较强的一种设计。

另一方面，当结果数组为｛1，2，3，4｝时，这几种结果数在写法上正如张正烺先生所说“都是积画为之”（参看本书第2章2.2.2节），如果按竖向顺序进行记录，必会产生相互混淆的问题。由此推测，早期的占法也许不做记录，因而有可能将这类算法用于占筮。但是后来产生了对算得的筮数进行记录的要求，为了避免记录的混乱，要么代之以某种符号，例如将奇数1、3都记为1，要么就得改进算法，使结果数的取值大于或等于5，以避开2、3、4诸数。从已发现的筮数的构成特点来看，古代占筮家们很有可能是兼而有之地调整改进着计算及记录的方法。总的趋势是将结果数的取值定在5～9的范围内，而数1的存在很可能是保留下来的一种记录符号，在大多数情况下已不再是实际算得的筮数。

笔者估计，用9为最大的结果数的另外一个原因可能与9这个数的记数地位和神学地位有关。商代甲骨文显示，当时已使用十进制记数，9是1～10这10个最基本的数符中最大的奇数。笔者认为商周时期已有了早期的筹算，人们可能已逐步掌握了某种我们目前尚不确知的用九种筹码符号表示数目的方法（参看本书第八章的8.5节）。由于逢10进位，因而即使是在早期的筹算记数系统中也不必采用专用的数码10，这样，9就成了筹码数符中引人注目的最大的一个。如果考虑古人“满招损”的哲理认识，以9而不是10为最大的结果数也显得十分协调。此外，《周髀算经》是传世算书中较为古老的一种，如果书中所记晚商数学家商高回答周公问时，所说的“矩出于九九八十一”确为周初之事，则商代已有乘法和除法计算时使用的九九口诀。九九口诀的存在，非常直观地通过乘法计算规律的掌握，强化了“九”的神秘感。周人承袭了商人的数学知识，9这个数在记数和数算上的特殊地位应当引起西周占筮家们的关注，进而被赋予了浓重的神秘色彩和相应的哲理含义，占筮时求得的最大结果数为9，显然具有最好的神示效果和与哲理认识有关的衍绎效果。在先秦古籍中，可以看到不少与“九”有关的说法。例如《尚书·洪范》的“九畴”，《尚书·禹贡》的“九州”，《诗·长发》的“九围”、“九有”、“九截”，《周礼·保氏》的“九数”等等，它们似乎都与“九”的记数地位、神学地位和哲学地位有一定的关联。

这样，从神示效果来判断，在结果数的取值为一位数的情况下，｛6，7，8，9｝应当是较好的选择。当然，结果数取值范围的确定也会有一个过程，从本书第2章2.2节介绍的商周时期的出土筮数来看，就有9这个数相当少的现象，而且不能肯定此时的数9是用传世的揲算方法求得。这种现象似乎表明传世揲算定型的时期应在西周中期以后。或者说，当西周中晚期的占筮家们找到了结果数为｛6，7，8，9｝的算法后，便用这种算法逐步取代了过去的那些算法。

（2）结果数的取值为多位数的情形

理论上，揲算结果数可以取为多位数，但这种较大的R值将带来两方面的不利影响，一方面是取较大的R值必然要求使用较大的S值，而参揲策数太多时会降低揲算时的操作性，甚至无法操作。另一方面，揲算过程具有一定的演示性，当揲算结果数偏

大时，揲算过程无法做得比较干净利落，演示效果会变差，从而有损神示性。大体上，与一位数的取值范围相比较，结果数的多位数取法并无优势可言。观察已知的商周筮数及后人创制的一些筮算方法，的确都极少或没有发现使用 10 或 10 以上的数做筮算结果数的例子。

(3) 与命题 B_2 有关的思考

如果按命题 B_2，取 $C=4$ 时，必有形如$\{R+1,R+2,R+3,R+4\}$的结果数组。由此可知，若取 $R=5$，所得结果数组也是$\{6,7,8,9\}$，能够满足传世揲算的要求，因而也是一种可供选用的算法设计方案。例如，取 $C=4$、$R=5$、$M=4$，由命题 B_2，就可以得到 $S=(R+2C)M+2=(5+2\times4)\times4+2=54$ 策。对 54 策做分 2、挂 1、揲 4、归扐、4 变的操作后，将揲得策数除以 4，必有结果数$\{6,7,8,9\}$。注意到 54 接近于“天地之数”55，似可认为这是一种曾被古代占筮家们试探过的算法。或者说，他们曾将这种算法设计与命题 A 所表述的传世揲算做过比较和选择的可能性是很大的。

现在的分析表明，很可能是因为按命题 B_2 设计的这种算法历经了 4 次变易，而其中的第 1 次变易只能出现 1 种扐策数（由本书第 4 章中的定理 4 可知，此时 $L=M+2=4+2=6$ 策），与后继的 3 次变易中都有两种可能的扐策数相异。这种第 1 次变易时，扐策数实际上不会发生变化的现象是可以通过全举法思路予以验证的。这样，第 1 次变易完成后，虽然进入第 2 次变易的参揲策数将因减少 6 策而变成了 48 策，但这是一种固定的变化，相当于直接用 48 策进行揲算，从而使第 1 次变易显得多余。这一来自全举法思路或经验积累的判断也许是古代占筮家们不选命题 B_2 的方式进行算法设计的主要原因。

7.2.3 关于揲策数 M 的比较分析

(1) $M=2$ 的情形

$M=2$ 时，按命题 B_1 及前面两节的讨论，取 $C=3$、$R=6$。由于$(3-M)\leqslant K\leqslant 1$的约束条件，$K$ 值只有一种选法，即 $K=1$。此时参揲策数 $S=(R+2C)M+K=(6+2\times3)\times2+1=25$ 策。根据本书第 4 章中 4.3.1 节给出的定理 3，第 1 次变易时，扐策数不 3 则 5。但进入第 2 次变易以后（包含第 3 次变易），由全举法不难验证，所得扐策数都只有 $L=4$ 一种可能，不会形成扐策数发生变易的情形，使后继计算不能顺利完成。因此，不能将 M 值取为 2。

(2) $M=3$ 的情形

$M=3$ 时，按命题 B_1 可以顺利地完成揲算，因而应是一种可选的方案。在西汉扬雄创制的《太玄》占筮术中便选用 3 作为起卦算法的揲策数。对于 $C=3$，$R=6$，若取 $K=1$，则参揲策数为 $S=(R+2C)M+K=(6+2\times3)\times3+1=37$ 策。很难认为古代占筮家们没有对这样的算法做过试算。如果他们把这种算法与传世揲算进行了比较，很可能会因为这种算法设计方案中用策较少而使计算操作偏于简单，会降低问筮者对神

示效果的心理评价而不予采用。

(3)M ⩾ 6 的情形

$M=6$、7 或更大的数值时，情况恰与 $M=3$ 时参揲数 S 的选值偏少相反。以 $M=6$、$C=3$、$R=6$、$K=1$ 为例，由命题 B_1，可得 $S=(R+2C)M+K=(6+2\times3)\times6+1=73$ 策。与 49 策相比，这个策数似乎偏多，从而使得操作过程复杂化，操作性会变差。显然，M 值过大时，各次变易中反复揲取的策数过多，容易发生差错，演示效果也不好。而且过大的 M 和 S 的值还会使归扐策数明显增加，导致依靠双手完成的挂扐筹策的操作遇到困难。这样，可以判定 $M=6$、7 或更大的数值是不合适的，古代占筮家们应当不会选用这样的算法设计方案。

(4)M = 4 和 M = 5 的情形

从实际占筮中操作性能的角度来考虑，较好的取法应当是 $M=4$ 或 $M=5$。估计古代占筮家们也对这两种 M 值做过试算比较，其结果是选用了 $M=4$。此时主要的对比分析的判断依据似乎应当是谁的神示效果更好，估计古代占筮家们也是出于类似的考虑进行比选的。下面用具体的计算来帮助我们做出判断：

当 $C=3$、$R=6$、$K=1$ 时：

若取 $M=4$，则 $S=(R+2C)M+K=(6+2\times3)\times4+1=49$ 策；

若取 $M=5$，则 $S=(R+2C)M+K=(6+2\times3)\times5+1=61$ 策。

根据本书第 4 章 4.3.1 节中给出的定理 3，$M=4$ 时，第 1 次变易时扐策数 L 不 5 则 9，第 2、3 两次变易时，L 不 4 则 8；$M=5$ 时，第 1 次变易时 L 不 6 则 11，第 2、3 两次变易时 L 不 5 则 10。这两种算法的参揲策数变化情形可表示为下述的枝形关系：

$M=4$ 的情形：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 32\{ & 24 & 24\div4=6\\
 & 40\{ & & 28 & 28\div4=7\\
49\{ & & 36\{ & & \\
 & 44\{ & & 32 & 32\div4=8\\
 & & 40\{ & 36 & 36\div4=9\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \text{结果数},(R=6)
\end{array}$$

$M=5$ 的情形：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 40\{ & 30 & 30\div5=6\\
 & 50\{ & & 35 & 35\div5=7\\
61\{ & & 45\{ & & \\
 & 55\{ & & 40 & 40\div5=8\\
 & & 50\{ & 45 & 45\div5=9\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \text{结果数},(R=6)
\end{array}$$

相比之下，$M=5$ 时，所用揲算策数 S 的取值略显偏多，而且计算过程中数字变化相对平淡，其操作性和演示效果似乎都稍差于 $M=4$ 的算法。很可能是由于这方面的原因，使得古代筮家们选择了 $M=4$ 的算法方案。

这种只有通过细心比较才能发现的差异如果的确是古代占筮家们放弃 $M=5$ 的算法方案的主要原因的话，将使我们意识到揲算的定型应当是在长期使用中不断改进才完成的；是对包含了 M 值在内的多种参数进行试算对比后优选出的结果。

7.2.4 关于总策数 S 的比较分析

(1) 与筹策尺寸相关的分析

S 值偏大时不便操作，过小时又因涉数过简而神示性不足，用于占筮算法的设计均不理想，所以 S 的取值必须合度。所谓合度，必然与所用筹策的数量和尺寸有关。从1971年陕西千阳汉墓出土的骨制算筹的尺寸来看，长度为13. 5cm左右，而直径为0. 3cm左右，[4]应与《汉书》所记的算筹尺寸相近。《汉书·律历志第一上》说：

> 数者，一、十、百、千、万也，所以算数事物……其算法用竹，径一分长六寸，二百七十一枚[注1]而成六觚，为一握。

估计商周时期所用筹策的尺寸应与此相去不远。考虑到将策扐于指间的策数不可能太多，按上述尺寸，大约可扐10策左右，因而用于揲算的策数 S 应在40～60策的范围内比较合适。1993年，荆州王家台秦墓出土一批竹简，其中有一种为《归藏》的文本，同时出有60枚装在竹筒内的算筹。[5]根据《周礼·大卜》中的记载：

> 大卜掌三《易》之法，一曰《连山》，二曰《归藏》，三曰《周易》。其经卦皆八，其别皆六十有四。

是说周代使用的《易》占都有相同的卦象，估计也使用相同的起卦算法。因此，与《归藏》竹简同出的算筹还用于起卦揲算也是有可能的，而且这批算筹共有60根，能够满足揲算用策的数量要求。

(2) 与算法模式相关的分析

在 $C=3$，$M=4$，结果数均为一位数的条件下，如果取 $R=1$，$K=-1$，可得

$$S=(R+2C)M+K=(1+2\times3)\times4-1=27$$

这是参揲策数 S 取值最小的情形。

结果数均为一位数而 $C=3$、$M=4$ 时，$R=6$ 是最大的取值，如果取 $K=1$，则可得到

$$S=(R+2C)M+K=(6+2\times3)\times4+1=49$$

这是 S 取值最大的情形。虽然在27～48的范围内可用于起卦揲算的策数有多种，但从参揲策数 S 的数量上观察，它们的神示性或操作演示效果会由于策数偏少而不如49策理想。另一方面，如果嫌49策不够多而要想增加 S 的取值，势必只有通过增加变易次

数 C、揲策数 M 或者结果数 R 的取值才能实现。然而从前文的比较分析可知，增加 C、M 或 R 的取值后形成的算法与传世揲算相比并无明显的优点。由此可知，在这样的算法模式下，49 策显然是参揲策数的最佳选择。

（3）关于"天地之数五十有五"和"大衍之数五十"的思考

传世揲算选用 50 策、实际只用 49 策的做法，主要是算法规则所遵循的数学规律使然，应当是古代占筮家们从神示性和操作性诸方面对多种算法进行了试算或实用比较之后作出的选择。注意到《易传・系辞上》记载揲算时，有"天地之数五十有五"和"大衍之数五十"两种说法，然后才指明"其用四十有九"。似乎 49 策这个数是衍生于 55 或 50 这两个具有神意的数的。如果真是这样，当时直接取 55 或 50 做总策数 S 岂不更好。事实上，在易学研究中，如何才能将 55 和 50 这两个数与 49 协调起来，从来都是一个非常费解、因而众说纷纭的难题（参看本书第 3 章 3.1.1 节）。

下面从数学的角度来探讨这个问题。

根据命题 B_1，对应于 $C=3$、$M=5$、$R=5$、K 的取值范围为 -2、-1、0 或 1 时，S 可取为 53、54、55 或 56 策，其中就有天地之数 55 在内。或者说，古人出于对 55 这个数的神秘崇拜，而用 55 策做试算的话，要找出相应的算法是不困难的。只不过用这种算法得到的结果数组是｛5，6，7，8｝（参看本书第 4 章 4.5 节）。顺便指出，商周筮数中以 1、5、6、7、8 诸数为多见，所用算法是否与 $C=3$、$M=5$ 及 $R=5$ 的算法设计有关，还有待考证和探讨。

类似地，按命题 B_1，对应于 $C=3$、$M=5$、$R=4$、K 的取值范围为 -2、-1、0 或 1 时，S 可取为 48、49、50 或 51 策，其中就有大衍之数 50 在内，只不过用此法算得的结果数组是｛4，5，6，7｝。可以认为，如果存在对 50 这个数的神秘崇拜，古代占筮家们必定找得到这种算法。

古代占筮家们放弃这两种算法的原因会是怎样的呢？将命题 A 的算法与它们相比较，不难发现这两种算法的共同缺点有三：一是结果数组的数字构成不如｛6，7，8，9｝的神示性强；二是 $M=5$ 时，揲算过程中的数字变化略显平淡，因而演示效果略差；三是这两种算法方案均为既可以挂 1，也可以不挂 1，由本书第 4 章中定理 5 和定理 9 便可证实这样两种状态是可以并存的，而古代占筮家则可以通过试算和全举验证发现这种不具备算法惟一性的缺点。尽管如此，仍然可以肯定地说，与神圣的"天地之数"或"大衍之数"相比，这些缺点都太微不足道了，古代占筮家们不会因此就放弃 55 或 50 两数的选择。那么，是什么原因使得他们要用 49 而不用 55 或 50 呢？也许，比较合理的解释是揲算定型为用 49 策时还没有产生天地之数或大衍之数的概念，或者没有将对这两个数的神秘崇拜引入起卦揲算的设计。数分奇偶的认识可能在古人学会用手指头完成简单的点数记数时就形成了。当他们发明出建立在奇偶认识上的早期占筮术时，很有可能会将天地观念与数之奇偶相比附，从而使数的奇偶性质与当时还处于原始阶段的神学及哲学意识联系在一起。商周时期，能够算出 1～10 这十个自然数的和等于 55，或者算出 5×10=50 等等（参看本书第 8 章 8.1.1 节）都是没有问题的，人

们对这类数产生神秘崇拜的可能性也是存在的，但周人并没有将 S 的取值与 55 或 50 联系起来，似乎表明这种联系是揲算定型以后的事情。很可能是春秋战国时期的易学家们为了给 49 的来源做出解释，便将人们对 55 或 50 的神秘崇拜引入易学，并载入《易传·系辞》。55 和 50 这两个数与传世揲算选用 49 作为参揲策数，本来并没有任何数学上的联系，只是由于得到的途径可以比附于天地观念，并且在数值上接近 49，而古代占筮家们又不可能具备足够的数学知识去解释揲算中的道理，结果，这些数都成了神秘性极浓的易数。

7.2.5 关于 K 值的比较分析

按照命题 B_1，对于 $S=(R+2C)M+K$，当 $C=3$、$R=6$、$M=4$ 时，K 的取值范围将根据 $(3-M)\leqslant K\leqslant 1$ 的约束条件来决定，可知此时 K 的取值有 -1、0、1 三种。这样，$S=(6+2\times 3)\times 4+K=48+K$，于是就有 $48-1=47$、$48+0=48$ 和 $48+1=49$ 策三种 S 值可供选用。传世揲算中选用的是 49 策。现在要问：与 47 和 48 两数相比较，49 有什么优点呢?

命题 B_1 就是本书第 4 章中的定理 5，讨论的是有挂 1 条件下的揲算。而在本书第 4 章中的定理 9，则给出了无挂 1 条件下的揲算规律。这两条定理的不同，在于 K 的取值范围有异。在不挂 1 的条件下，K 的取值应满足 $(2-M)\leqslant K\leqslant 0$ 的约束条件。当选用 $M=4$ 时，K 可取 -2、-1、0 三种数值，对应于 $C=3$ 和 $R=6$，可知 $S=(R+2C)M+K=(6+2\times 3)\times 4+K=48+K$，就有 $48-2=46$、$48-1=47$ 和 $48+0=48$ 策三种 S 值可供选用。

这样，在有挂 1 的情况下，S 的取值可在 47、48、49 三数中选择。而在无挂 1 的情况下，S 的取值可在 46、47、48 三数中选择。显然，47 策和 48 策同时适用于定理 5 和定理 9，表明这两种参揲策数既可挂 1，也可不挂 1，不具备算法的惟一性。若选 49 策，必须挂 1 才能使用，正是这一策数在数学上具有的一种重要的优点。如果古代占筮家们在算法设计上真是考虑到了这么仔细的程度，才选定出 49 策的话，那的确是一件令人惊叹的事情。由于这几种策数的试算和全举分析都能够做到，至少不会有特别的困难，因而古人不必考虑什么 K 值，就可以对所用算法是否满足必须挂 1 的要求作出直观的判断。所以，笔者推测古代占筮家们应该是曾经对此做过比较选择的。顺便指出，虽然选用 46 策时必须不挂 1 才能达到成卦目的，同样具有算法的惟一性，但若注意到有挂 1 时会大大提高揲算的神示效果，古代占筮家们在确定参揲策数时，选用 49 策而不是 46 策就是很自然的事情了。

7.2.6 关于“分二”和“挂一”的思考

在揲算中，“分二”是一个很关键的步骤，正是由于“分二”时的随机性，才有结

果数的变化，揲算才能获得灵气和魅力。《易传·系辞》说“阴阳不测之谓神”，指的就是这种随机性。如果不是分2，而是分3，揲后余策的组合情形会变得过于复杂，要想从中总结出规律并程序化为一种算法将不是一件容易的事情。而且即使找得出一定的规律，也不见得能适用于占筮。事实上，在类似的占筮术中尚未发现有分3的设计，笔者估计古代占筮算法中也不曾有过分3的做法，所以本书不考虑分3的情况。当然也不考虑2以外的其他分法。

与“分二”相比较，“挂一”是一种锦上添花的设计。可能早期的揲算并没有挂1的安排，因为从数学上看，揲算基本模式的建立与有无挂1并无必然的联系，或者说不挂1的揲算照样能达到起卦目的。例如$S=46$策且不挂1时，分2揲4，3变后所得结果数也是{6，7，8，9}，而且由于此时必须不挂1，所以也具有算法上的惟一性，同样具有良好的数学特性。估计在早期的揲算中并没有挂1环节的设置，也许是因为后来占筮家们发现加入挂1环节后会收到意想不到的神示效果，便成了惯例沿用至今。正是挂1的出现，使后人归纳一般性的揲算命题时遇到了一些麻烦，但是有挂1的揲算比无挂1的揲算要神奇得多，则是不可否认的事实。作为传世揲算规则中约定的环节，在后人的研究中不能排除挂1的安排。如果进一步考虑挂2，甚至挂3的算法，理论上当无不可，古代占筮家们也很有可能设计出相应的算法规则，但似有画蛇添足之嫌，估计古代占筮家们并不采用这类做法，所以在本书对一般性揲算命题的表述及对同类算法的比较分析中，均不对不同的挂法进行讨论。

7.3 《周易》揲算的发明决非偶然

上述比较分析表明，传世揲算是所有类似算法中最能满足占筮要求的一种，是西周占筮家们在长期的占筮活动中，通过大量的实算比较选定的最佳算法，这也是揲算自定型以后具有相当好的稳定性的主要原因。

应当指出，命题B的提出与解读，属于现代数学中初等数论的范畴，涉及的数学知识有许多都是西周时期不可能具备的。命题B只在命题的来源上与《周易》揲算有关。在这个意义上，可以说如何解读一般性揲算命题，是古人留给我们的一则初等数论课题。命题B证明了一般性揲算命题的存在性，不过仍可能还有别的解读形式。虽然一般性揲算命题的表述形式也许并不惟一，但可以肯定，不论哪种表述形式，都是古代占筮家们无法找到的，可见他们根本不可能采用先建立一般性命题，再选出命题A的办法来定出揲算的操作规则，他们只能循着实算摸索和经验归纳的途径完成揲算的发明和定型。西周占筮家居然从揲算模式下若干可供选用的算法中找出了最好的一种，实在是很不容易的。

注意到西周王室对卜筮的管理较为严格，可以推测占筮家们对筮法的研究和改进也会在相对封闭的环境中完成，因而具体的改进定型过程必然鲜为人知，且几乎没有

向后人作如实传达的条件。这种状况事实上有利于将筮法规则的来源做神化处理，从而起到强化占筮影响的作用。显然，这对王权的巩固和占筮家地位的维护都有好处，因而上述的推测应当是一种最有可能出现的状态。到了春秋时期，周室已无力落实严格的管理，但流传到各地的《周易》占筮术却早已定型。在浓厚的神秘文化气氛中，人们对这种神奇的基本上没有数学瑕疵的占法源于古圣人之手的说法应当是认可的。当然，他们也没有条件去追寻包括揲算在内的《周易》占法的具体的发明过程。由于我们已经没有办法得知古人发明揲算时的具体情况，因而通过对揲算一般性命题的探讨，得出可供考古研究参考的推测结论，不妨视为讨论揲算发明概况这一课题的一种途径。

利用命题 B，可构造出多种可供选用的揲算方案，在对这些方案进行系统的比较分析之后，可以帮助我们对揲算的形成过程做出合理的推测。

首先，古人曾经使用过的算法可能有多种，以揲扐为特征的算法只是其中的一种类型。但揲算模式一经出现，在算法形式上就显得与众不同，并以自身特有的优点而被古代占筮家们所重视。相应地，在揲算模式逐渐地具有主流地位的情况下，其他筮算方法被陆续淘汰也就在所难免了。

其次，从揲算模式的出现到最后定型，必然涉及多种同类算法的比较和选择。早期的揲算应该相对简单或粗糙，占筮家们也许对算法内部的逻辑结构和结果数出现频率等方面的意识还极为肤浅或淡薄，但经过不同算法间的反复对比，以及长期占筮经验的积累，他们逐渐产生了相应的考虑，尤其是在引入了程序化的处理方式后，有效地促成了算法设计的改进。古代占筮家们可以在无须掌握系统的数学规律的条件下，以蓍草、筹策为算具，事实上按全举验证法的原则，即依序列出各种具体算法在各自的筮算过程中所有可能出现的情况，检查判断这些算法的数学正确性及用于占筮的可行性。古代占筮家们极有可能使用过无挂 1 的方案，后来又发展出有挂 1 的方案。此外，在 $C=1\sim5$、$R=1\sim6$、$M=3\sim5$、$S=40\sim60$、$K=(3-M)\sim2$ 等范围内的多种可选算法中，极有可能有不少具体的算法设计曾被他们摸索过——或做过试算，或用于实占——才积累了足够的经验，设计出这种分揲加程序化的模式下的最佳算法。

揲算的定型应当经历了一段并不算短的过程，集聚了西周占筮家们的数学智慧，从一个侧面显示了西周数学的发展状况。揲算的发明有其历史的必然和成功的条件，同时也是西周占筮家们充分应用已有数学知识并有所发展的成果。揲算的发明不是“偶然的凑巧”。

注　释：

[注 1]　《汉书·律历志第一上》所说的数字“二百七十一”属于衍绎类易数，通常解释为以下三数的和：卦象的爻符数量（即画数）6，揲算的参揲策数 49，以及揲得《乾》卦时可能涉及的最多的策数 36×6=216，也就是 6+49+216=271。由于 6 是爻数，而 49 和 216 都是策数，这 3 个数具有两种不同的量纲，如果只是将这 3 个数字加在一起，就应该把得到的和 271 理解为一个无量纲的数。

参考文献：

[1] 郭沫若. 周易时代的社会生活. 见：蔡尚思主编. 十家论易. 上海：上海人民出版社，2006. 6

[2] 吴文俊. 中国数学史大系·第一卷. 北京：北京师范大学出版社，1998. 185～188

[3] 汪宁生. 八卦起源. 考古. 1976（4），242

[4] 宝鸡市博物馆，千阳县文化馆，中国科学院自然科学史研究所. 千阳县西汉墓中出土算筹. 考古. 1976（2），85

[5] 荆州地区博物馆. 江陵王家台十五号秦墓. 文物. 1995（1）

第 8 章　《周易》揲算是西周数学的一项成果

> 周人灭殷后，数作为六艺之一，开始形成一个学科。用算筹来记数和四则运算很可能在西周时期已经开始了。
>
> ——钱宝琮《中国数学史》

> 那么西周时代的数学有哪些内容呢？这是难以考定的。推测有郑众所列"九数"项目中方田、粟米、衰分、商功、均输、旁要的部分方法。
>
> ——邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》

《周易》揲算是西周占筮家们在程序化的算法设计上的一项成果，是迄今所知西周数学中惟一可做完整描述的算法例证。揲算有三条值得注意的数学特点：第一，具有程序化的实用算法设计思想；第二，采用了以经验归纳和全举验证为主的数学方法；第三，使用筹策算具完成点数计算的计算方式。从中不难发现揲算对春秋以降中国传统数学的形成有着一定的影响，应当是中国古代数学史研究中不可忽视的内容。

8.1　西周数学概况

由于史料的缺乏，在中国古代数学史的研究中，关于西周数学的具体情况至今了解甚少，因而直接讨论西周数学尚有一定困难。在现有条件下，目前常见的研究途径主要有两条：一是根据出土的西周及西周以前的文物中与数学有关的材料，推论西周时期的数学发展状况；二是从后世文物和算书文献中的相关资料反溯西周数学。毋庸讳言，在确凿的考古证据发现之前，这样的研究结论大都属于推论或猜测，人们所能做的只不过是找寻尽量充分的依据和进行合乎情理的推证。

8.1.1　商周出土文物中的数学资料

(1) 李俨先生的研究

李俨先生在《中国古代数学史料》一书中介绍了数十例殷墟出土的甲骨上契刻的数字，书中说：

> 今知除一、二、三、四、五、六、七、八、九、诸单位数外，还包含有十一、十二、十三、十四、十五、二十、二十五、三十、三十三、三十七、四十、四十一、五十、五十六、六十等数，百以上的数字如：
>
> 一百　《殷墟文字乙编》3024：“方登人百。”
>
> 二百　《殷墟摭遗续编》62：“二百人王。”
>
> 三百　《殷墟书契前编》3，31，2：“左右中人三百。”
>
> 四百　《殷墟卜辞》1517：“四百。”
>
> ……
>
> 一千　《殷契佚存》324：“丁未卜……王登千人。”
>
> ……
>
> 八千　《殷契粹编》119：“□人八千在驭。”
>
> 一万　《库方藏甲骨卜辞》310：“登妇好三千，登旅万。”
>
> 三万　《殷契粹编》1171：“癸卯卜……其□三万。”
>
> 甲骨文的数字记载，三万是最高的记录，又甲骨文三位以上复位数的记载，如：
>
> 《殷墟文字乙编》2908：“□一百六十四，兔一百五十七。”
>
> ……
>
> 上举的甲骨文，只是数字的记录，当然这些复位数的记录也说明是通过运算得来的。
>
> 《殷墟书契前编》3，23，6：
>
> “五十犬　五十羊　五十豚
>
> 三十犬　三十羊　三十豚
>
> 二十犬　二十羊　二十豚
>
> 十五犬　十五羊　十五豚”
>
> 这一片甲骨文内的数字都是五的倍数……[1]

由此可以确认商代已有一至九和十、百、千、万共 13 种记数字符，使用十进制记数法，可以点数和记录十万以内正整数的任何数值。虽然没有使用数 0，一般认为还没有形成成熟的位置值制记数方法，因而不能用于笔算形式下的四则运算。但从具体的

数字来看，使用这套已经具有自洽特征的记数法对事物的数量进行记录，一般都能给出准确的或者说不会引起歧义或误解的数值描述。这就表明，在早期的汉字系统中，这套事实上并不用于笔算的记数符号基本上可以满足用文字的形式记录事物数量的使用要求。

不过，在李俨先生的研究中没有涉及与《周易》占筮术有关的数学问题，因而也就没有将传世的《易》占揲算作为中国古代的一项数学史料予以介绍。为什么会这样？具体原因笔者并不清楚。

关于数量的计算，笔者推测：

①商人已能熟练地完成十万以内正整数的加法运算；

②只要不出现负数，十万以内正整数的减法运算也应该为商人所掌握；

③从一些数字有明显的倍数关系来看，商人应能完成日常使用的正整数乘法的计算，且不排除九九乘法口诀的存在；

④借助于九九乘法口诀，商人很可能会做比较简单的正整数范围内的除法。

此外，如果排除笔算的话，从筮算和传世筹算都使用筹策的做法，似乎可以估计商人在日常生活中的求数计算也是以筹策为工具完成的，不妨称之为早期筹算，以区别于春秋战国时期较为成熟的筹算方式。当然，对于商代的早期筹算所遵循的规则及具体的操作形态，至今尚无了解。对所谓早期筹算的相当粗糙的概念性的认识主要来源于筮算和传世筹算。

(2) 其他与商代数学有关的内容

在殷墟出土的甲骨文中，发现商代先公先妣的庙号或称呼有取为“大甲”（“贞大甲賓于咸”。张秉权：《小屯·殷墟文字丙编》36）、“大乙”（“乙丑贞王宾大乙翌亡尤”。罗振玉：《殷墟书契后编上》1. 11）、“妣癸”（“妣癸希王”。董作宾：《小屯·殷墟文字乙编》3117）等等的情形。在这些名称中使用了称为天干的甲、乙、丙、丁……癸中的字符，表明在殷、商时期，甚至有可能在更早时期的华夏先民中，已经出现了用这些字符进行某种专用排序（很可能是日序）的做法。

根据晚商甲骨文中“属于帝乙的带有王年的周祭材料”[2]，商人应当是用商王在位的年数来纪年。他们将一年分成十二个月，逢闰另加闰月，用十进制序数纪月，而用干支法纪日。用干支纪年则是商代以后才出现的做法。干支排序纪日的方法同样见于殷墟甲骨中的文字记载（图 8-1），是用甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸十种称为天干的字符，与子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥十二种称为地支的字符，按甲子、乙丑、丙寅、丁卯……的规则，得到的一种循环排序。由于一个轮回共有六十种排法，故称为“六十甲子”。但是这六十个序号只用于循环状态下的排序记数，没有逢六十进位的安排。一般认为干支排序记数序列不是六十进制，它们既不是数学意义上的记数符号，也不用于一般情况下的求数计算。甲骨文中用干支纪日，用十进制数序纪月的例子相当多，例如甲骨卜辞“癸卯卜出贞旬亡祸在七月”（郭沫若：《殷契粹编》1430）、“壬辰卜大贞翌己亥有于兄十二月”（容庚：《殷契卜辞》

31）中的癸卯、壬辰、己亥都是日期，而七月、十二月则是月份。

在干支排序中，天干字符共有十个，可能与用十个手指点数及十进制记数法的流行有关，而地支字符共有十二个，则可能与一年中太阳和月亮通常交合十二次（不含闰月）的天象观察有关。但商人为何用十进制数序而不用十二个地支字符纪月，是否与闰月有关，目前并不清楚。一个更为重要的问题是这些日期和月份具体属于哪一轮甲子和哪一个王年，仍是需要另行考定的事情，迄今已有多种研究成果可供参考，但尚无一致的结论。尤其是学者们在前些年所做的夏商周断代工程及商周金文研究中，与此相关的困难是显而易见的。形成这一局面的主要原因不外乎两种可能出现的情形。一种可能是商周时期已有某种失传了的协调年、月、日三种时序的方法，不过后世学者们还没有找到。而另外一种可能，是记录年、月、日时序的方法至少在西周早期以

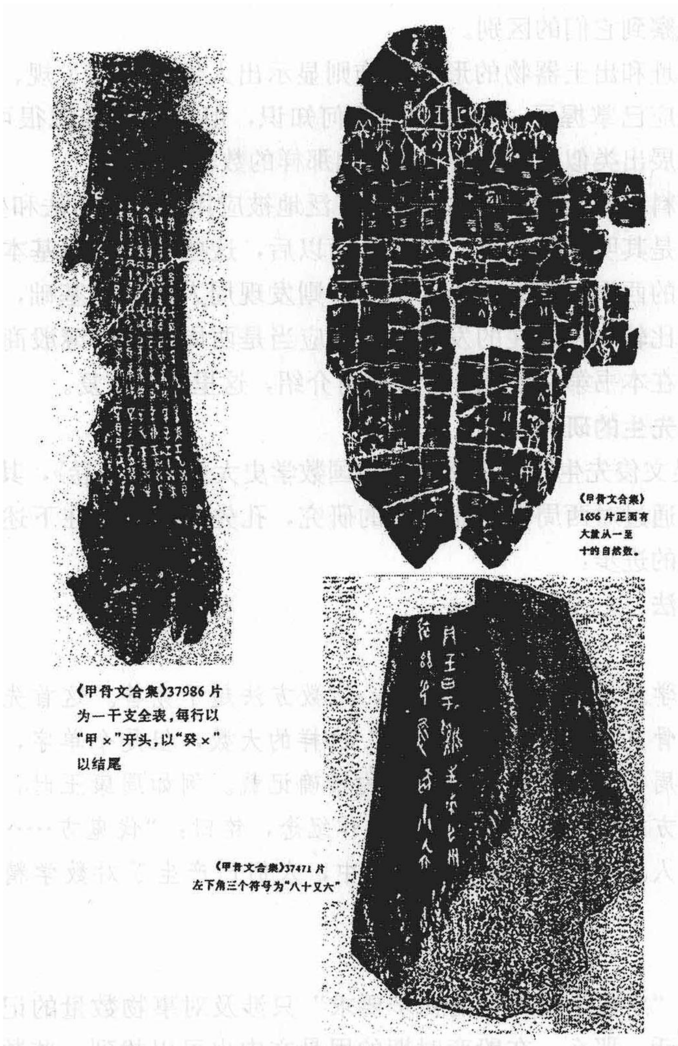


图 8—1 商代卜甲卜骨上的数字和干支表

（引自邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》）

前彼此之间还没有形成明确的对应规则，所以后世学者们无法找出这样的规则。然而无论如何，这两种可能的情形都显示出干支排序具有古老的来源。这就表明，从早期组合数学思想的出现时期来看，干支纪日法中使用的六十甲子组合排序，可能比卦象构成中使用的爻符组合排列更为古老。此外，全举法思路在六十甲子的构成中有着具体的体现，显示出全举法的确是极为古朴的数学方法。

从商周时期的应用情况来看，尚未发现将干支顺序转换为自然数数序的做法，表明六十甲子虽有排序纪日的功能，却属于专用的记数序号，并不用于一般的记数。这与当时数字的用法有明显的区别。甲骨文中的数字既用于排序，比如兆序，月序和王年中的年序，又用于一般性的记数，包括事物准确数量（正整数）和概数的记录。从《易经》中“先甲三日后甲三日”（《蛊》）和“先庚三日后庚三日”（《巽》九五）的辞文中，也可以观察到它们的区别。

不少建筑遗址和出土器物的形制纹饰则显示出人们已使用了规、矩、准绳之类的工具，因而商人应已掌握了一些相关的几何知识，但是这些知识很可能只限于实用，尚未发现从中发展出类似于古希腊演绎几何那样的数学成果。

这些考古材料说明商代的数学知识已广泛地被应用于天文历法和生产、生活之中，满足实用的需要是其明显的特点。周人灭商以后，这些数学知识基本上都为周人所接受。在目前已知的西周时期的出土文物中，则发现周人以此为基础，在数学方面有了不少进步。但是比较令人关注的发现，似乎应当是西周文物中继殷商之后多有出现的筮数，相关情况在本书第 2 章 2.2 节中已有介绍，这里不再重复。

（3）**孔国平先生的研究**

1998 年，吴文俊先生主编出版了《中国数学史大系・第一卷》，其中的第三章由孔国平先生执笔。通过对西周青铜器铭文的研究，孔先生指出，在下述诸方面，周人的数学取得了明显的进步：

①关于记数法：

> 西周数学继承了商代的十进制，记数方法趋于完善。这首先表现在大数记法上。甲骨文中虽已出现“三万”这样的大数，但是个单字，显然是大约之数。而西周金文中已有了对大数的精确记载。例如周康王时，盂曾受命征伐北方的鬼方族，获胜后做小盂鼎以作纪念，铭曰：“伐鬼方……孚（俘）万三千八十一人。”这说明在社会生活中，人们已产生了对数学精确化的初步要求。

其实，如果“对数学精确化的初步要求”只涉及对事物数量的记录在多位数时要求精确到个位的话，那么，在殷商时期的甲骨文中也可以找到一些数字，例如“二千六百五十”、“三百又四十八”（罗振玉：《殷墟书契后编下》43. 9 和 41. 2）等等，足以证明这种要求在契刻甲骨卜辞的时代就已经在数值记录达到百位甚至千位的量级时

得到了满足，可见这种性质的记数要求至迟在殷商时期就已经产生了。至于商人的记数能力在精确到个位的情况下是否达到了万的量级，目前虽然尚无具体实例予以证实，但从“登妇好三千，登旅万。”（《库方藏甲骨卜辞》310）的记录来看，笔者猜测应当没有太大的问题。或者说，西周记数方法中由千到万的量级进位关系更有可能是承续于殷商，而不大可能是西周数学家的发明。其间的不同，或许是到了西周时期，这样的记数方法更为普及。也许正是因此，使得后人有更多的机会发现具体的例证。由此可见，与殷商相比，说西周的“记数方法趋于完善”，似乎还需要从别的方面依据相应的考古材料才能予以证明。

②关于计量单位：

> 从金文中这些单位名称（指里、田、邑、亩、两、钧等计量单位的名称）来看，周代许多器物数量已有定称，其度量衡的确比商有了明显进步。不仅如此，周人还有了明确的“方里”、“方尺”概念，如西周召圜器铭：“（周王赐召）毕土方五十里”，土地面积以平方里计，大概以此为最早之记录。

在传世的先秦文献中有多处用正方形及其边长描述土地面积的做法，例如《孟子·万章》中所说的“小国地方五十里”，学者们历来的解释都是用边长为五十里的正方形所围成的地块来描述“小国”拥有国土的数量。如果用平方里做土地面积的计算单位，则小国的国土面积是 50 里×50 里=2500 平方里。笔者推测，“土地面积以平方里计”的做法，不仅在西周，而且在春秋战国时期都还没有出现。同样地，西周金文中“毕土方五十里”述及的土地，也应释为相当于边长五十里的正方形所围的地块，不能将“方五十里”解读为“五十方里”或“五十平方里”。如果是五十平方里的话，这块正方形土地的边长不过七里多一点，恐怕是太小了。从“方……里”的方式中所观察到的古人描述地块的大小或进行数量比较的情形，说明西周和春秋战国时期已产生了对土地面积的多少进行表达的需求，而且人们已经找到了一种能够满足实用需求的描述土地数量的方法。从数学上来说，这种方法虽然谈不上完善，却也不失为一种准确的定量描述。这种情形应当与中国古代分封制的形成和普及相协调，从而可供研究中国封建制的学者参考。尽管“方……里”并不等同于“平方里”，但“方……里”的存在表明当时人们已经接触到了面积的概念。由此看来，似乎可以将“方……里”视为中国古代曾经使用过的一种特殊的土地面积单位。

此外，关于这种描述土地数量的方法是周人的发明还是承续于商人的问题，则有待考定。如果史称“商高定理”的勾股特例的确是商人的发现，而“数之法出于圆方。圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一”（语见《周髀算经》）确为商人的认识，那么，商人关于“方”的概念至少在矩形和正方形的形状特征，以及与边长有关的数量的计算方面都已经有了准确的了解。从中不难发现，当矩形的长和宽的长度尺寸都是正整数时，若长宽边长分别从 1 取到 9，则逐一地列出所有的长宽乘积就是一份完整的

九九乘法口诀表。其中，与长宽相等的情形相对应的就是正方形，只是还没有产生出用长度单位的平方度量面积的做法。据此，笔者推测，用“方……里”的方式描述土地的数量，很可能是商人的发明。由于用这种方法已能对正方形地块的大小进行准确的数量表达，足以满足当时对地块的大小进行描述或对比的具体需求，所以传续到西周和春秋战国时期仍有广泛应用，而且在辅以割补处理之后仍无过时的迹象，例如《墨子·非命上》的“绝长继短，方地百里。”便是如此。也许是由于在引入了割补方法以后，可以更好地满足实际应用，因而暂无建立与平方有关的面积概念的需求的缘故，直到春秋战国时期还没有进一步地产生出“方里”或“平方里”之类的面积单位。

③关于历法：

> 周历与商历的最大区别是采取了一月四分法，这种分法是以月相为标准的。西周金文中共有四个月相名称——初吉，既生霸，既望，既死霸，相当于今之朔，上弦月，望，下弦月……从西周金文来看，周人仍采用60干支纪日法，但把干支附属于月相之上。如师奎父鼎铭：“佳六月，既生霸，庚寅。”是说在六月的第二个月相时段的庚寅这一日……金文中的孟、仲、季三个顺序数词常用来表示一季中的三个月。周代有明确的季节划分，这也是比商代进步的地方。

④关于四则运算：

> 整数四则运算产生于何时，尚无定论。但至今未在甲骨文中发现有关运算的记载，西周中期曶鼎铭文，是我们所知最早的记载运算的文字。铭曰：“（曶）以匡季告东宫……东宫乃曰：偿曶禾十秭，遗十秭。来岁弗偿则倍四十秭。”这是东宫对曶与匡季经济纠纷的判决，大意是要匡季赔偿曶庄稼10秭，并反送给他10秭，共为20秭。若第二年偿还，就要增加到原来的两倍，即40秭。这实际上已包含加和乘两种运算：10＋10＝20，20×2＝40。……另外，从西周筮法分析，当时已有减法与除法运算。

孔先生对西周筮法（应是指揲算）的分析，似乎局限于揲算中单个的计算环节。或者说，在将完整的一套算法设计进行拆解之后，根据单个的计算环节，只得出“当时已有减法与除法运算”的结论，并没有将揲算作为一种算法设计的成果来看待。这种情形可能与缺乏对揲算进行深入全面研究的背景有关。

⑤关于几何知识：

> 虽在金文中尚未发现几何知识的记载，但从青铜器及其上面花纹形状的分析，可知周人已掌握了相当丰富的几何知识。

⑥关于占筮，孔先生认为：

西周的卦与《周易》所载不同，表示卦的数字不是“六、七、八、九”而是“一、五、六、七、八”。但后来的八卦无疑是由西周卦符演变而来的。根据西周卦符特点及后世的筮法，我们提出西周筮法假说如下：

取筮草 44 根，任意分成两堆，若两堆筮草根数恰等，则得到卦符 1。若两堆不等，则从每堆依次扣除 4 根，直到每堆余数不大于 4 为止。把两堆余数加起来，必为 4 或 8，从 44 中减去 4 或 8，得 40 或 36，我们称为第一次差。

把 40 或 36 根筮草按上法演算一遍（不必考虑两堆是否相等），得到第二次差——36，32 或 28。

最后把第二次差用同样方法演算，得第三次差——32，28，24 或 20。用第三次差除以 4，有 4 个可能的结果——8，7，6 或 5。其结果便是卦符。[3]

不过，孔先生所说的“西周的卦”和“西周卦符”指的都是不宜称为卦和卦符的筮数组和筮数。在本书第 2 章表 2—2 中可以看到，在已知的西周筮数中，筮数 1 的出现频率高达 114/319=0.3574。用不着计算，一眼就能看出，用孔先生设想的算法，得到数 1 的概率却是非常低的。因而这种算法顶多也只是各种可能被古代占筮家们摸索过的算法中的一种，似乎很难认为是商周占筮中曾经使用过的主流算法。如果不考虑筮数 1 的处置方式，只依揲算结果数为 5、6、7、8 去反溯算法的话，参考本书第 4 章 4.5 节的讨论，至少可以给出九种可行的算法设计，而孔先生的“西周筮法假说”只不过是其中的一种。应当说，提出“西周筮法假说”的意义，并不在于找出西周占筮家们当时所用的具体算法，而在于使我们认识到西周占筮家们在发明传世揲算的过程中完全有可能接触过多种不同的算法。不言而喻，这也是本书希望予以说明的判断之一。另一方面，从孔文中“西周的卦与《周易》所载不同……后来的八卦……”的提法来看，似有六十四卦不是西周事物的意思。

8.1.2 古代文献中与西周数学有关的资料

在已知的先秦传世文献和考古材料中，尚未发现专门的数学著作。汉代算书中可供追溯先秦数学的著作以传世的《九章算术》和《周髀算经》，以及 1983 年江陵张家山汉墓出土的竹简《算数书》[4]等最为重要。但是在这些古书中几乎不能分离出可考定为西周数学成果的具体内容，学者们只能笼统地推测有的命题及相关算法可能源自于西周。例如邹大海先生在《中国数学的兴起与先秦数学》一书中就推测：

西周时代的数学内容，有郑众所列九数项目中方田、粟米、差分、商功、均输、旁要的部分方法。[5]

当然，由于举不出具体的例证，这些方法的使用形态仍有待考证，从而有损这种推测的说服力。迄今为止，在其他古代文献中找到的涉及西周数学的材料零星而稀少，只有《周易》中的卦象、《易传》中的揲算、《周礼》中的九数等为数不多的记载。由于已知的出土文物中直接与西周数学有关的材料并不丰富，尤其是在文字记录中尚未发现类似汉代算书那样的内容，相比之下，学者们目前对殷商数学的了解显得比对周人的数学建树的了解要具体得多。不过，在现有的条件下，要想获得更多的与西周数学有关的信息，对古代文献的研究仍然是一条不能忽视的途径。应当说，本书对揲算的研究便是这种情形。

（1）**钱宝琮先生的研究**

钱宝琮先生主编的《中国数学史》认为：

> 周人灭殷后，数作为六艺之一，开始形成一个学科。用算筹来记数和四则运算很可能在西周时期已经开始了……“句三、股四、弦五”，这个特殊例子的发现，可能是很早的。[6]

其中关于“数”开始形成一个学科的依据，应出自《周礼·保氏》的记载：

> 保氏掌谏王恶，而养国子以道，乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。

其中的“九数”指九种类型的实用算法，是贵族子弟必须学习的六种技艺知识之一。东汉大司农郑众注释“九数”为：“方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。”《九章算术》所列与之基本相同，只是“差分”作“衰分”，“旁要”作“勾股”。此外，占筮术及揲算的存在表明筹策曾长期地被用做求数计算的工具，这种状况似乎能够说明，将筹策算具用于记数和完成四则运算在西周时期就已经存在了。到了春秋时期，在一些传世的典籍文献中出现了与筹算有关的内容，从其普及甚广的情形分析，此时的筹算已渐趋成熟，用筹策算具完成记数和计算已是常见之事。钱先生没有对他的推测作具体讨论，也没有提及《周易》卦象和揲算，显示出他对西周数学的评介是很谨慎的。

（2）**罗见今先生的研究**

吴文俊先生主编的《中国数学史大系·第一卷》的第四章由罗见今先生执笔，在“《周易》中的数学思想”一节中，罗先生讨论了下述内容：

①关于河图洛书，罗先生指出：

> 《周易·系辞传》称：“是故天生神物，圣人则之；天地变化，圣人效之；天垂象，见吉凶，圣人象之；河出图，洛出书，圣人则之。”这是经书中关于

> 河图洛书的最早记载，河洛并提，暗示两者同属天生神物，其兆象可以预示天地变化和吉凶利害，成为圣人治世的准则。但《周易》中并未解释什么是河图洛书，于是后世学者纷纷著书立说，形成延续 2000 多年的河洛之学，在中国文化史上为一大专题……河图洛书可能与纵横图有关系，但有何种关系目前尚不清楚。

纵横图即中国传世的一种三阶幻方，也叫九宫图（图 8-2）。在这个图中，纵向、横向以及对角线上的 3 个数之和都等于 15。图 8-2 中还列出了一部分古人赋予纵横图的文化含义。

四	九	二
三	五	七
八	一	六

巽 立夏 东南	离 夏至 南	坤 立秋 西南
震 春分 东	中	兑 秋分 西
艮 立春 东北	坎 冬至 北	乾 立冬 西北

图 8-2　中国古代的一种三阶幻方及其部分文化含义

1977 年 7 月，安徽阜阳西汉汝阴侯墓出土一件太乙九宫占盘，断为汉文帝七年（公元前 173 年）之物。其天盘上按纵横图的顺序标识出一至九共 9 个数字，是中国目前所见最早的三阶幻方实物。附带说明，图 8-3 中未摹写出应居于中部的数字五，但在相关文献中则有“在‘一君’与‘八’间近中心位置针刻一‘五’字”[7]的介绍。

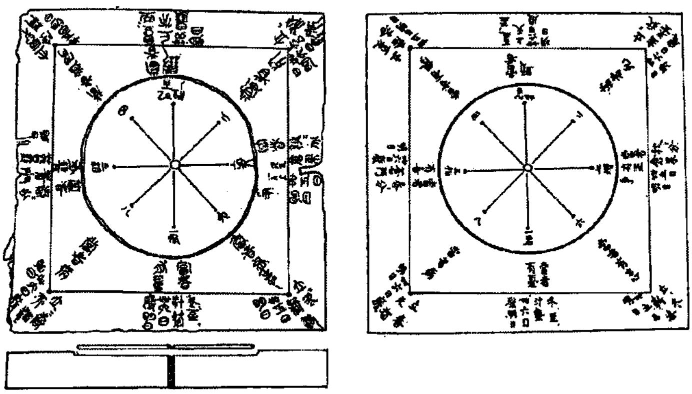


图 8-3　汝阴侯墓出土占盘的摹本（左）及示意图（右）

（引自《考古》1978（5），第 341 页）

由此可知，在西汉早期，纵横图已被用于占式之类的占问术。在将地理方位、季节变化等因素作出综合考虑之后，纵横图也被用做修建房屋及医治疾病的依据。例如《大戴礼记·明堂》有“明堂者，古有之也。凡九室……二九四七五三六一八”的记

载。又如《黄帝内经·灵枢》将“九宫八风”用于医学等等。但是从这些资料中均看不出河图洛书与纵横图有什么联系。

在朱熹所撰的《周易本义》一书中，画有用黑白点数构成的河图洛书的图像（图8—4）和说明，兹转录如下：

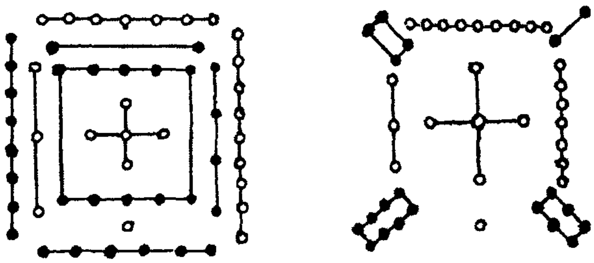


图8—4 河图洛书

右《系辞传》曰：“河出图，洛出书，圣人则之。”又曰：“天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十。凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。”此河图之数也。洛书盖取龟象，故其数戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足。

蔡元定曰：图书之象，自汉孔安国、刘歆、魏关朗子明，又有宋康节先生，邵雍尧夫，皆谓如此。至刘牧始两易其名，而诸家因之，故今复之，悉从其旧。

按蔡氏的说法，将这两种由黑白点数构成的图像联系于河图洛书并纳入易学范畴的做法，似乎可推溯至汉代，而在宋代及以后的易学中已是成例。但是罗先生并没有考证纵横图的发明时期，因而不能确定它是否属于西周时期的数学成果。

②关于“八卦数学”，罗先生认为：

从数学上讲，从两类符号集合中任取两个的有重复排列只有4种：$2^2=4$，如此而已。同理，任取三个的有重复排列只有8种：$2^3=8$，这就是八卦了……组合数学十分重视数字配置的均衡性，在一定约束条件下达到这种均衡往往需要较高的技巧。八卦图同洛书数一样，巧妙的配置方法令人赞叹……将八卦看做八类元素集合，任取两元从下到上排列起来，便得到六十四卦——即所谓“重卦”：$8^2=64$。虽然从阴阳两爻的两类中任取六元的有重复排列$2^6=64$也可以得到完全相同的结果，但按重卦的原意不应做后一解释。《说卦》称“八卦相错”，错即重叠，即“重卦”的由来。

③关于卦象与二进制，罗先生指出：

（莱布尼茨）认为，二进制顺序在远古时代的《易经》中已被应用，这位微积分的奠基人相信古代中国人在发明二进制计算方面有优先权。这一看法广为传播，产生了很大影响。我国数学史界不少学者对此持保留意见。卦爻可用二进制解释与它本身具有二进制含义不同。国外也有人认为六爻不具有数字意义，这是不了解九六说的缘故。当然，九六说亦不能证明卦爻本身有二进制含义。我们的着眼点在于，作为二元哲学的一种模式和数学符号的一种体系，八卦数理本身的抽象性带来了与之相应的普适性……我们对将八卦数理与现代科学某些成就直接联系起来的方法持慎重态度。在《周易》或有关史料中还没有发现支持这些观点的材料，何况方法本身也是有争议的。

④罗先生还讨论了“《周易》中吉凶休咎出现的频率，即概率问题”。但没有讨论揲算结果数，以及爻符、卦象出现概率的具体计算。所论涉及两个方面：

一方面，依据《尚书·洪范》中“稽疑”一节的下述内容：

汝则有大疑，谋及乃心，谋及卿士，谋及庶人，谋及卜筮。汝则从，龟从，筮从，卿士从，庶民从，是之谓大同，身其康强，子孙其逢吉。汝则从，龟从，筮从，卿士逆，庶民逆，吉。卿士从，龟从，筮从，汝则逆，庶民逆，吉。庶民从，龟从，筮从，汝则逆，卿士逆，吉。汝则从，龟从，筮逆，卿士逆，作内吉，作外凶。龟、筮共违于人，用静吉，用作凶。

在对君、臣、民、卜、筮五个方面的吉凶判断进行分类后，罗先生认为：

用模糊数学的方法算出“五方”之值的取值范围，可用作参考……这样看来，古代君主采取了明智的决疑政策，这是早期概率统计思想一个古老的例证……但它还不是自觉的概率论思想，这是需要说明的。

另一方面，罗先生还指出：

《易经》是最古的占筮用书，它的关于吉凶休咎成败得失的记录，从客观上反映了现实生活中各种随机事件出现的概率。刘蔚华做过一个统计：“我粗略地把《易经》中卦爻辞的吉凶断语，分为大吉、一般的吉、利、无咎无悔、悔吝不利、凶、厉等七类，对其出现的次数和所占比重做了一个统计。”……总的说来，吉祥类的比重较大，占5/7，非吉祥类占2/7，好事比坏事多……从一个侧面反映了当时社会安定与动乱的客观情况。

⑤关于《易传·系辞上》“大衍之数”章记载的揲算，罗先生重点研究的内容是：

“引用朱（熹）说，参考今人的研究，对《周易》揲法做一数学上的解释并给出证明。”由于本书第 3 章 3.2.2 节已对罗先生提出的“分揲定理”有详细介绍，故不再重复引述。但于数学解释之外，罗先生并没有对《周易》揲算的数学思想进行归纳总结或分析讨论。这种情况的出现，可能与罗先生的相关论证尚不完备有关。关于揲算，罗先生的结论是：

> 虽然《周易》不会有分揲定理的表述形式，但古人在漫长的年代里积累了经验，能够应用这一数学规律，将程序和结果记录下来，却是考之有据的。它包含着深邃的数学道理，反映了古人智慧的光辉。[8]

看来，罗先生似乎是有将揲算视为一种程序化算法设计的意思，因而揲算应当是中国古代数学中很有特色的一项应用实例，但能否将揲算界定为西周数学在程序化的算法设计上的一项成果，则没有作出明确的论断。

这样，在罗先生的论述中，似乎只有“八卦数学”中反映组合数学思想的卦象构成部分，可被视为是西周数学的成果。

（3）**邹大海先生的研究**

作为“第一部明确以秦统一中国以前的数学发展为研究对象并有重大进展的数学史专著”，[9]邹大海先生的《中国数学的兴起与先秦数学》一书对先秦数学作了较全面的研究。书中关于西周数学的内容主要强调“十进位值制记数法的形成”和“数学成为一门学科”，但因史料缺乏，除十进制记数法之外，具体的例证仍然很少。

邹先生认为：

> （商代）是算筹形成时期，此时算筹的用途逐渐固定，或者至少竹木棒（片）有一项计数的专门功能。……由远古用竹棍、草秆等记数，周人以蓍草占卜和《周易》的经文成于西周初年，至迟不晚于西周中叶看，商周时代有产生算筹记数法的条件和背景……推测算筹记数法可能成于商周之际……纵横相间，在表示 6～9 的数码中以其中一根算筹代表所含的 5 这样的定制，可能到西周春秋之交才形成。

笔者认为，中国传统文化中的筹算和筮算都有久远的渊源，由于都采用筹策为计算工具，因而两者之间可能存在着某种关联。一种情形是认为筮算出现较早，古人将原始筮算所用的筹策用于社会生活中其他场合的求数计算，于是逐渐形成了原始筹算。这是筹算源于原始筮算的推测。另一种情形是认为筮算毕竟只是一种专用算法，而社会生活中需要通过计算来解决的问题却很多，特别是当古人的计算工具由手指、绳结、草茎之类发展到主要使用筹策的时候，便形成了原始的筹算。在这种情况下，古人在发明占筮术时将筹策用于原始的筮算则是很自然的事情。这是筮算源于原始筹算的推

测。不过，原始的筹算和原始的筮算谁更古老，是一个尚还无法弄清的问题，因而上述两种推测虽然各有合理之处，但都缺乏充足的依据以否定对方，难于得出比较一致的及可信的结论。另外一种更为可能的情形，是筹算和筮算的起源都很早，从原始形态开始，发展到商周时期，筹算和筮算在很长的时期内相互影响，从而使它们的发展及改进表现为一种互有促进的动态过程。笔者倾向于认同这种筮算和筹算大体上同源的推测。

从邹先生的具体推考可知，郑众“九数”诸项中，除旁要的勾股特例可以上溯至西周或晚商外，其他都只溯及于春秋战国时期，只能估计其中部分知识源于西周。虽然邹先生推测：

> 西周时代的数学内容，有郑众所列九数项目中方田、粟米、差分、商功、均输、旁要的部分方法。

但是同时他也指出：

> 西周的九数具体是哪九个门类，已经不可考了。

就应用实例而言，在邹先生所著的这部书中可以归结出的西周数学成果大致有以下几项：

——“《周髀算经》所说应反映出西周时已有九九”；

——“商高可以定在西周初年”，因而勾股特例的发现不会晚于周初；

——形成于西周或更早的八卦和六十四卦体现了“组合数学思想”。

其中前两项的依据主要是《周髀算经》中周公与晚商数学家商高的问答：

> 昔者周公问于商高曰：“窃闻乎大夫善数也，请问古者包牺（伏羲）立周天历度。夫天不可阶而升，地不可尺寸而度，请问数从出?”商高曰：“数之法出于圆方。圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩以为句（勾）广三，股修四，径隅五。既方其外，半之一矩。环而共盘，得成三、四、五。两矩共长二十有五，是谓积矩。故禹之所以治天下者，此数之所生也。”周公曰：“大哉言数!”

邹先生推考的结果是：

> 九九早在殷末已有，这种可能性也是有的。

同样地，勾股特例也可能发现于殷商。这样，九九口诀和勾股特例很可能都属于

商人（商高）传给周人（周公）的数学知识，其起源当早于西周。

关于一般性的勾股定理，根据《周髀算经》中相关的记载，邹先生推考的结果是直到春秋时期才被陈子提出，因而不能断为西周时期的数学成果。

关于卦象的形成时期，邹先生未做考证。不过，从其“《周易》的经文成于西周初年”的说法来看，虽然字面上强调的只是“《周易》的经文”而没有涉及卦象，但由于在《易经》的文本中，除了经文之外还有与经文的列写逐条配置的六十四卦的全部卦象，使得这一说法似乎包含了六十四卦也形成于西周时期甚至是西周初年的意思。按《史记·日者列传》的说法，伏羲创制八卦，文王演为六十四卦，如果认为八卦的起源早于西周，而六十四卦则可以划为周文化的范畴。

至于《易传》中记载的揲算，邹先生将其视为一种“操作法”，划归为春秋战国时期“一个四则运算的例子”，不是西周时期的事物。由此可以推知，邹先生似有在揲算发明以前，八卦和六十四卦就已经被发明出来了的意思，并可作出周人与筮时卦象的求取应当另有他法的理解。

此外，关于河图洛书与九宫图的关系，邹先生认为：

> 钱宝琮先生批评宋代易学家把九宫图称为河图或洛书，认为这是“穿凿附会，不值得一驳”。这是受了当时疑古之风的影响。现在多数学者认为两者是有联系的……中国远古时代形成数字与方位乃至季节等的对应关系，在这种数字崇拜的神秘主义背景下，最终形成了具有特殊文化含义的九宫图，并不断调整或赋予它新的含义。这样说，也许离事实不远。

在论及九宫图的出现时期时，邹先生考证的结论是：

> 拟为战国晚期应该问题不大。[10]

总而言之，根据邹先生的研究，若将九九乘法口诀和“勾三股四弦五”的勾股特例视为商文化的内容，则古代文献中记载的西周数学可考的实用例证就只有六十四卦一种了。

上述情况表明，在已知的古代文献中与西周数学有关的记载和实用例证并不多，如果不考虑《周易》占筮术中使用的揲算的话，目前学者们较为一致的看法是只有八卦或六十四卦这样一个例证，显示出原始形态的组合数学思想在西周时期有着具体的应用。虽然从揲算环节中可以找到正整数四则运算的例子，但就运算能力而言并未超出商代的水平。这样一来，难免形成西周数学只是承续了商代数学而鲜有发展成果的相对粗糙的印象。事实上，由于材料的匮缺，在今人的先秦数学史著述中，除了承续于殷商的内容之外，有关西周数学的较为具体的讨论几乎是一片空白，既不如商代数学翔实，又不如春秋战国的数学那样丰富。然而春秋战国时期丰富多彩的数学成果不

会是忽然地在很短的时期内取得的。可以认为，西周时期包括占筮家在内的数学家们在数学上肯定有所建树，他们在思想方法和算具使用方面积累的经验和技能为春秋战国时期许多数学成果的出现提供了必要的基础，这也是本书通过对揲算和卦象的研究形成的一种认识。

8.2　《周易》揲扐算法是西周数学的一项成果

将《周易》揲算界定为西周数学的一项成果，是将揲算作为一套完整的程序化的求数算法进行研究后得出的结论。如果将组成揲算的各个操作环节拆解之后，再对单个的操作环节进行观察，那么，这套算法涉及的计算将不会超出点数计算方式下简单四则运算的范围，甚至还可以简化到只涉及 50 以内正整数的减法计算。这样一来，揲算中用到的数学知识将超不出殷商时期早已达到了的水平，只能视为古人能做正整数减法计算的一个例证。显然，揲算在中国古代数学史中的研究价值远不止此。当本书证实揲算是一套没有数学瑕疵的、具有完整逻辑结构的程序化的专用算法设计时，必然会得出与按操作环节拆解后再作研究的思路完全不同的评价。

8.2.1　关于揲算定型时期的再讨论

本书第 6 章 6.1 节从概率统计的途径做出了揲算定型的时期应不迟于西周晚期的推测，这是下限。由于文献资料和出土材料都比较缺乏，目前还难于较准确地考定揲算定型时期的上限。综合相关的间接的信息，笔者倾向于认为揲算定型时期的上限不会早于西周中叶的末期。因而传世揲算可推定为西周事物，是西周占筮家们在程序化算法设计上的一项成果，也是目前所知道的西周数学中惟一可作完整描述的算法实例。

本书第 2 章 2.2 节对六十四卦卦象的形成过程做了一些推测，相关的讨论似乎说明卦象形成的时期应不迟于西周晚期。由于只要是能得出奇偶两数的筮算方法都可以顺利地转化为阴阳爻符而形成卦象系统，因而不能认为卦象一定是在揲算定型以后才形成的。但从卦象很可能是由筮数演化而成的情况来看，卦象形成于揲算定型之后的可能性也是存在的。显然，在找到确凿证据之前，关于揲算和卦象谁先定型或形成的问题，还难以作出具体的结论。有鉴于此，本书将卦象的形成时期与揲算的定型时期作了分开讨论的处理，从结果来看，其下限都不迟于西周晚期。应当说，作为《周易》占筮术中必不可少的组成部分，揲算与卦象极有可能和经文一样，都定型于西周时期。

关于《易》占揲算定型时期的上限，除本书第 7 章 7.2.2 节的讨论之外，笔者还有以下思考：

在商武丁至帝辛时期的甲骨文中，有若干例“巫”字，例如“癸酉卜巫宁风”（罗振玉：《殷墟书契后编下》42. 4）、“贞異目巫”（董作賓：《小屯殷墟文字乙编》7661）

等等。其中“巫”的意义通常认为与神祇有关（参看徐中舒：《甲骨文字典》第496页），除了占卜术，很可能同占筮术也有一定的联系。《尚书·君奭》说：“在太戊时，则有……巫咸乂王家”，可知巫咸是商王太戊的辅臣。《吕氏春秋·审分览·勿躬》说：“巫咸作筮。”东汉许慎《说文解字》也有“古者巫咸初作巫”之说。一般认为，商代确有称为巫的人做占筮的事。注意到揲算中用到的数字计算并不复杂，顶多与50以内正整数的四则运算有关，甚至还可以简化到只用减法，而且采用的是十分原始的点数计数方式，但并不能因为商代已具备这样的计算能力，又有像巫咸这样的占筮家，就把揲算定型的时期上溯于商代。因为揲算的特点不在数算的复杂程度，而在算法模式的建立和操作程序的设计。前面的比较分析表明，传世揲算在算法设计上已有一定的难度，需要熟练的数算能力、严密有序的逻辑判断能力，以及敏锐的经验归纳能力，然而在商代似乎还达不到这样高的算法设计水平。揲算从模式的出现到完善定型，应经历了一段不能算短的过程。估计商代使用的占筮算法中已有揲算模式出现，但属比较简单的状态，或者是处于所用算法尚有缺点的过渡状态，远未发展到利用全举法对算法设计进行仔细核验和已经积累了丰富的经验足以完成改进定型的程度。

在商周时期的甲骨文、金文、陶文中发现了不少筮数，学者们认为这些筮数是当时的占筮记录，这些数字的获得则与当时所用的占筮算法有关。本书第2章表2－1的统计情况表明，筮数主要出现于商代晚期至西周中期。如果这些筮数在构成上与传世揲算的结果数相符，便有理由推测揲算定型于相应的历史时期。但从表2－2的统计，以及通过对同版筮数或同批筮数的构成所作的分析发现：筮数中的数字以1、5、6、7、8为多，9很少（共4例），而2、3、4三数则完全未见，而且同版甲骨或同批筮数在数字构成上与揲算结果数只有6、7、8、9四种几无相符的例子。一方面，这些情况说明迄今所发现的筮数不一定都与《周易》占法有关。李零先生在《跳出周易看周易》一文中就指出：

> 把所有‘数字卦’都归入《周易》的范畴是不大合适的，整个思路还有待拓广。[11]

不妨推测，这些筮数中为数也许不少的部分可能与相应发展阶段的，已经失传了的那些算法有关，其中一些算法即使采用了揲算模式，也还没有发展到定型的程度。另一方面，由于证据材料太少，周人早期使用的筮算方法与商人所用筮算方法之间存在着怎样的联系，目前还难于做出具体的判断[注1]。

根据这些材料，笔者估计揲算模式萌生的时期可能比较早，也许在商代以前就在原始的占筮术中使用了揲算模式下最为简单的一些算法。到了晚商和西周早、中时期，在不同的族群和邦国中曾出现过多种不同的筮算方法，可以认为在这些方法中就有渐趋复杂的揲算模式下的不同算法。经过古代占筮家们的不断改进和选择，揲算模式下的算法受到了特别的关注而成为主流算法，并在西周晚期以前完成了形如传世揲算的

定型设计。结合出土筮数的数字构成特点和它们同传世揲算结果数的差异，以及揲算在数学上已有一定难度等情况，可以推测揲算定型时期的上限大体上是在西周中叶，很难想象会有更早的可能。

总之，认为传世的《易》占揲算是发明或定型于西周时期的一种专用的求数算法，应该没有问题。

8.2.2 揲算是一项数学成果

说《易》占揲算与古人具有的数学知识相关，大概没有人会提出反对的意见。但要说揲算是一项西周时期的数学成果（还没有说它是西周数学的标志性成就之一）就不见得了。例如在朱伯崑先生主编的《周易知识通览》一书中，李申先生在他所写的“易学与数学”一节中是这样评价揲算的：

> 《易传》不研究有关实际问题的运算，它所说的，是纯粹的数与数关系。包括10以内奇数、偶数之和，以及10以内自然数总和；50以下某些数除以4的余数，倍数，以及某几个数与9、6的乘积等等。这些知识在当时，还不是一般人都很容易做出的答案。不过数学在当时已有了高度发展。当时的数学，已能乘方、开方，能算勾股、面积及各种比例问题，还能完成许多方圆问题的计算。所以《易传》中的数学知识在数学发展史上已没有意义，现代一般的数学史著作不提及。[12]

又如邹大海先生在《中国数学的兴起与先秦数学》一书中认为，揲算是一种“操作法”，是出现于春秋战国时期的“一个四则运算的例子”。在引述了《易传·系辞上》“大衍之数”章关于揲算的文字之后（本书第3章3.1.1节中也有这段引文，故未重复引出），邹先生说：

> 此段文字包含以下运算：天数总和为1+3+5+7+9=25，地数总和2+4+6+8+10=30，天地之数为25+30=55。把49根蓍草信手分为两部分，从这两部分中取一部分拿去1根，将这时的两部分，各自4根4根地取走，最后都余下不超过4根，其时所余的蓍草数有四组结果：(4，4)，(1，3)，(2，2)，(3，1)，这实际上是 $(48-m)\div4$ 和 $m\div4$ 的余数。3变得1爻，1卦6爻，1卦的变数为 $3\times6=18$。阳爻用九由“揲四”而成，故用策 $9\times4=36$；阴爻用六亦由“揲四”而成，故用策 $6\times4=24$。乾之策为 $36\times6=216$，坤之策为 $24\times6=144$；乾坤之策为 $216+144=360$。易六十四卦，阳爻，阴爻之数各192，二篇之策为 $192\times36+192\times24=6912+4608=11520$。系辞所记的操作法，当远在系辞撰写的年代以前，最先可能是用多次相减的方法确定余数的，到了系辞

时代就可以直接用乘法来计算抽出的蓍草数得到余下的蓍草数了。[13]

显然，李、邹二先生的论述至少存在以下两方面的问题：

(1) 对揲算进行了人为的拆解

所谓“算法”，不仅是单纯的数算法则，更是为了解决某种类型的数学问题而概括形成的具有完整结构的计算方法或规则。在现代数学中，“算法”通常是指具有一般性的计算方法，但在实际应用中，也存在一些具有特殊性的算法。例如，相对一般的勾股算法，“勾三股四弦五”即可视为不具备程序化特征的一种特殊算法。在《周易》占筮术中，揲算是一套完整的程序化算法。这套算法由一系列的数算环节构成，单看某一个具体的数算环节，的确是再简单不过了。例如揲 4 环节，无非是对一堆筹策做减法，这对早于商代的已具有正整数加减概念的古人或者初学数算的儿童，都不是一件困难的事情。不过我们关注的不仅仅是各个数算环节，更要看到将这些数算环节联系起来的严密的数学承续关系和内在的逻辑结构，应当明确，揲算是一种程序化的特殊的算法设计。将这种有着明确用途的成套算法拆解为一堆简单的数算而不从整体上加以研究的做法肯定是不妥当的。作为一种数学思想，程序化的算法设计从来是数学史研究中颇受重视的内容，而《周易》揲算本是研究西周时期程序化的算法设计数学思想时难得一见的、保存得相当完整的原生例证。这样珍贵的材料竟被草率地拆解而不值一提，可能与长期以来未能破解揲算的一般性命题，因而无法对揲算展开全面深入研究的情况有关。

(2) 没有对揲算形成的时期进行必要的推考

由于开方术见于《九章算术·少广》，尚不能考定出于西周时期（一般认为是春秋战国时期）的数学成果，所以李先生在上述引文中所说数学“已有了高度发展”的“当时”，很可能是指春秋、战国时期，或者就是指《易传》成书的战国时期。注意到李先生没有对揲算形成于西周时期的可能性进行推考，这样一来，给人的印象是揲算属于战国时期（最多属于春秋时期）的事物。在将揲算拆解为简单数算的情况下，其数学内涵明显地超不过商代的数学水平，再与后出的数学成果（比如开方术等）作比较，自然就不值一提了。

虽然邹先生已考虑到不能用《易传》的成书时代来作为揲算定型的时代，并指出：

> 即使“系辞”晚出，从考古发现的数字卦看，（揲算）仍可能代表早先的方法。[14]

但这里所说的“早先”，似乎是指发现筮数的殷商和西周时期。不过，对于早到何时，并无进一步的讨论，结果邹先生还是将揲算放在春秋战国时期。在将程序化的揲算视为一种“操作法”，并按操作环节进行拆解之后，揲算便成了春秋战国时期“一个四则运算的例子”。

通过本书4.3.3、6.1.2和8.2.1等章节的相关讨论，大体上可以将揲算认定为定型于西周时期的一种没有数学瑕疵的程序化的算法设计。由于在目前所掌握的商周时期的数学成果中，还没有发现有着专门用途的程序化算法设计的其他例证，因此，还可以将揲算界定为迄今已知中国最为古老的一种程序化的专用算法，是中国西周时期的一项实用型的数学成果。这样，本书便将程序化的实用算法设计的出现时期明确地提早到了西周时期，距今已有近2800年的历史。在中国古代数学史的研究中，这无疑是一个很有意义的结论。

8.3 《周易》揲算的数学特点

在数学上，揲算有三条值得注意的特点。

8.3.1 数学思想主要表现为程序化的实用算法设计

揲算是一种专门用于占筮的求数算法，揲算的完成有一套严格的操作规则，用现代语言将揲算描述为一种程序化的实用算法设计应该是没有问题的。这就反映出西周时期已经出现了与程序化的实用算法设计有关的数学思想。然而通过对揲算的分析研究，似可认为，无论是早期占筮术中使用的求数算法，还是在揲算的发明过程中出现过的算法，占筮家们接触到的包括传世揲算在内的筮算都是具体的特例，并没有形成对应的数学理论。显示出在古代占筮家们生活的时期，还不具备产生出与一般性算法相关的数学思考的条件，即使是在构建具体的筮算方法时，也不必强调数学意义上的理论思辨。这种情形应当是揲算所具有的数学特点之一。

商代的数学思想主要表现为实用数算，其范围不超出十万以内正整数的四则运算。九九乘法口诀，“勾三股四弦五”的特例及其在测量放线等方面的应用都是了不起的数学成就，但却不是程序化的算法设计。在已有的商代数学材料中，尚未发现具有程序化算法设计特征的例证。揲算以实例的形式表明西周时期出现了程序化算法设计的数学思想，是商代数学的一种值得重视的发展。虽然揲算还只是一种特殊的专用算法，远未发展到一般性算法的程度，也看不出具有明显的理论思辨的痕迹，但已是西周数学取得的一大进步。揲算是一套专门用于占筮的实用算法，这套算法完全是为了满足占筮的需要而发明出来的，可能由于于占筮之外几乎找不到其他具体的用处，因而在生产实践中并不存在寻求关于揲算的一般性算法的动因，也没有从中引申出某种数学理论的需求。

按理说，程序化算法的出现适应了社会生活内容更新发展的需求，更是生产和技术发展的需求。有些遗憾的是，至今还没有发现西周时期直接与生产发展有关的程序化的算法例证。但是揲算（包含早期的揲算方法）的存在使我们有理由相信，西周数

学家们已有能力和条件进行实用算法的创制，因而在《周礼》“九数”的内容中极有可能已经编入了一些实用的计算方法，可以用来解决当时社会生活中的一些相关问题，并因此成为西周贵族子弟们的必修学科。

8.3.2 数学方法以经验归纳和全举验证为主

揲算是以经验归纳为主通过多次试算和反复摸索，最终找出的专用算法。揲算本身的确是严密无瑕、万无一失的，但它并不是依据严格的理论推导形成的算法，在揲算中也看不到明显的演绎论证环节。可以认为，揲算不是通过演绎论证的途径得到的。占筮家们在摸索的过程中必然会注意计算环节之间的承续关系和算法内部的逻辑结构，还可以用全举法考察各种具体算法的数学可行性，显示出经验归纳是完善算法规则的可行途径之一，也是数学发展的一种重要方式。针对具体算法列举出所有可能出现的情形，除能证明这种算法是否正确和可行之外，往往还是建立这种算法的辅助手段，说明在缺少演绎论证的情况下，也有可能创制出某些正确的算法。在演绎论证的数学思想或方法尚未出现的古代，用经验归纳的方法和全举验证的手段解决数学问题是很自然的事情。

另一方面，算法一经认定，筮者关心的便不再是数学思考，而是熟练使用相关的算法程序，可以知其然而不知其所以然地加以应用，求出用于占筮的卦象。更由于占筮的本意乃是通神，神秘色彩极浓而数学知识含量偏低的易数便附会而生。在这种背景下，指望从揲算中产生出演绎论证类型的数学思想或方法显然是困难而不切实际的。

8.3.3 计算手段具有依赖于筹策算具的操作型特点

古代占筮家们正是利用筹策在“分二”时具有的随机性，发明了这种可用来沟通神祇的预测方法，使人们感到算得的结果代表着天地神明的旨意。显然，离开蓍草、筹策之类的计算工具，便谈不上占筮和揲算，可见揲算是一种非常典型的操作型算法。不用说，这也是一种与古代数学发展水平相适配的计算手段。可以认为，早期的占筮术很可能出现于那些使用筹策类的计算工具完成日常求数计算的族群。但是反过来，也可以认为，正是因为将草茎、竹签用作早期占筮算具的缘故，族群中才出现了将筹策算具用于日常求数计算的做法。由于年代久远，要想判断这两种推测的对错是有困难的。不过，根据现有的一些知识，考虑到占筮术有着极其古老的起源，包括筮算在内的各种求数计算在初始阶段都应该非常简单和原始，所使用的计算工具也应多种多样，草茎、竹签或筹策不过是各种算具中的一种类型等情况，笔者倾向于认为，在一段漫长的历史时期，占筮术的发展改进大体上与日常求数计算中筹策使用能力的提高是同步的，两者之间很可能存在着互动的关系。一方面，日常计算中筹策使用能力的提高有利于占筮家们不断更新自己的数学知识，熟悉和掌握新发现的数算规律，以及

引进较为先进的数学思想及方法，从而有效地促成筮算规则的更新或改进；另一方面，蓍草筹策既然可以用来通神，对筹策类的计算工具在数算上的使用便有着促进的作用，使这类算具在实用计算中得到了广泛的发展和应用，最终成为中国传统数学中解决数学问题的基本工具。

卦象是揲算结果符号化的产物，但揲算本身并无将算法过程符号化的要求，而且起卦时，筮者按既定程序用双手操控筹策完成计算，每次筮算只对最后结果进行记录，既不保存计算过程，也不必对计算过程进行分析讨论。这些都与使用数学符号的笔算方式有着明显的区别。就揲算而言，算法与算具的配合是相当成功的。从商周到宋元时期的古代数学家们使用筹策算具也曾取得过辉煌的数学成就，不过，从发展的角度看，依靠这种类型的算具解决数学问题或进行数学研究到底能走多远，则是一个数学史研究中已被论及的问题。[15]在中国传统数学中，筹算有着自身难于克服的弱点已为学界所认识，筹算之被淘汰，势不可免。

8.4 相关评价

作为迄今所知西周数学中惟一可做完整描述的程序化的实用算法例证，《周易》占筮术中使用的揲扐算法无疑是西周数学的一项成果。基于对揲算的研究，还可以从以下几方面做一些评价：首先，揲算是西周时期的一些数学知识与人们对自然现象和社会现象的认识结合在一起时出现于占筮术中的事物。作为沟通人神的一种重要方式，揲算被赋予了浓厚的神秘文化色彩。这种状况不仅表现为揲算与中国传统数学之间存在着密不可分的数学方面的关联，而且使得一些具有神学性质的思维方式长期存在于中国的传统数学中。其次，古朴直观的全举法思路在揲算定型过程中的成功应用使我们认识到，将枚举出全部可能出现情形的方法称为全举法，在关于中国古代数学的研究或讨论中的确是比较方便的。第三，揲算的完善定型显示出西周时期人们已经具有程序化的实用算法设计的能力，这种数学知识方面的进步不仅推动了卜筮文化的演进，而且对中国传统数学，甚至对中国传统文化的形成及发展都具有一定的影响。

8.4.1 揲算与传统数学

上节归纳总结的揲算所具有的数学特点恰与中国传统数学的基本特征相容。观察中国传统数学，自秦汉至明清，其主要的形态特点正是具有算法化倾向、缺乏演绎论证和使用筹策或算盘等手动操作类型的计算工具，从而揭示出中国传统数学与古老的揲算之间有着密切的关联，中国的传统数学可谓渊源久远。

春秋战国时期，诸子立说，百家争鸣，数学思想也有发展。例如，墨、名两家的一些思考已涉及无限的概念，出现了与点、线、面、体有关的几何观念和量度认识，

产生了关于矛盾律、排中律等方面的逻辑思辨。不过，以演绎论证为特征的数学思想虽见端倪，但在以实用算法的创制为主的环境中，并没有得到进一步的发展，更没有成为数学思维的主流内容。

秦汉时期，从《周髀算经》《九章算术》以及《算数书》等古代算书的内容来看，数学知识仍以实用算法的创制为主，所发明的各种算法多为经验归纳的结果。而且，在各种算法中，一题一法的现象是很普遍的，显示出各种算法设计具有专用的特征。魏晋数学家刘徽为《九章算术》作注（成书于公元 263 年），在追寻古代算法的同时，发展出割圆术和阳马术等新的数学方法和思想。正如邹大海先生所说：

> 刘徽时代与春秋战国有一个共同点，就是专制统治的削弱和思想的解放，墨家和名家的名辩思想也在这一时期得到复兴。[16]

但汉晋数学仍然是在《九章算术》等古代算经的框架下求发展，相关的工作仍以获得实用算法为主要目的，并没有形成以逻辑论证和演绎推理为特征的理论化的数学体系。

随着佛教的传播，唐代曾有一些印度天文学家来到中国，他们参与了制定历法的工作。由于天文学与数学有着密切的联系，这就为中印两国之间的数学交流创造了一定的条件。《开元占经》是当时奉敕编撰的一部天学著作，书中除译有印度《九执历》外，还介绍了印度学者们用于书写的数码符号和一些用笔算方式完成的天文算法。也许是因为中国当时的历法并不落后，传统数学已自成体系，算筹的使用也相当成熟，结果使得这些来自西域的数学知识大都没有被采用。

可能从汉唐时期开始，一些中国传统算法陆续传入西域及阿拉伯国家，此后又传入地中海地区和欧洲。例如，斐波那契（L. Fibonacci，约 1170—1250 年，意大利数学家，早年曾师从阿拉伯人学习数学）作于 1202 年的名著《算经》中，就载有盈不足术和百鸡问题等源自中国的内容。当时阿拉伯人已掌握了不少古希腊及中国和印度的数学知识，这些数学知识为始于欧洲文艺复兴时期的近代数学的产生打下了基础。然而，通过阿拉伯国家传入中国的西方及印度的数学知识却鲜见影响。不论出于何种原因，这种交流状况对中国古代数学的演进和发展显然是不利的。

宋元时期，秦九韶（1202—1261 年，南宋数学家）作《数书九章》（成书于 1247 年）。李冶（1192—1279 年，南宋数学家）在《测圆海镜》（成书于 1248 年）和《益古演段》（成书于 1259 年）中提出了“天元术”。朱世杰（13～14 世纪，元代数学家）作《四元玉鉴》（成书于 1303 年），发展出“四元术”。他们的工作取得了不少重要成果，使借助于筹策算具建立程序化算法规则以解决实用问题为主要目的的传统数学发展到了巅峰状态。元末以后，中国传统数学逐渐衰微，除了珠算有所发展之外，基本上再无重要建树，甚至宋元数学中的一些比较高深或需师传的内容已无人能识，传统数学处于退步境地。

明清时期，古希腊的演绎几何和西方数学家们自文艺复兴时期开始逐步发展形成

的符号代数等数学知识传入渐多，但大都遭到专制体制和守旧文人的顽强抵抗，不能得到广泛的传播和应用。直至清末民初，专制统治被再次削弱，随着民主意识与科学思想的逐步被接受，这种抵抗才彻底失败。从此，中国数学家们逐渐加入到现代数学研究的行列之中，并作出了自己的贡献。

中国传统数学不可避免地被现代数学所取代，除了社会及政治因素之外，还与其自身在思想、方法和工具方面存在着一定的局限性关系极大，同时也是新一代数学家们通过广泛的交流与学习，融会了中外科学思想和先进方法的必然结果。李文林先生在《数学史概论》一书中就指出：

> 中国传统数学自元末以后逐渐衰微的原因是多方面的。皇朝更迭的漫长的封建社会，在晚期表现出日趋严重的停滞性与腐朽性，数学发展缺乏社会动力和思想刺激。元代以后，科举考试制度中的《明算科》完全废除，惟以八股取士，数学家社会地位低下，研究数学者没有出路，自由探讨受到束缚甚至遭禁锢。同时，中国传统数学本身也存在着弱点。筹算系统使用的十进位置记数制是对世界文明的一大贡献，但筹算本身却有很大的局限性。在筹算框架内发展起来的半符号代数“天元术”与“四元术”，就不能突破筹算的限制演进为彻底的符号代数。筹式方程运算不仅笨拙累赘，而且对有五个以上未知量的方程组无能为力。另一方面，算法创造是数学进步的必要因素，但缺乏演绎论证的算法倾向与缺乏算法创造的演绎倾向同样难以升华为现代数学。而无论是笔算数学还是演绎几何，在中国的传播都由“天朝帝国”的妄大、自守而显得困难和缓慢。16、17 世纪，当近代数学在欧洲蓬勃兴起以后，中国数学就更明显地落后了。[17]

在本章 8.3 节所述三条数学特点的层面上，认为揲算（包含早期揲算）是中国传统数学的滥觞，似乎有一定的道理。无论如何，《周易》占筮术，尤其是其中的揲算、易数和易学理论对中国传统数学的影响的确是存在的，但从不同的角度却可能作出不同的评价。例如乐爱国先生在《周易对中国古代数学的影响》一文中认为：

> 分析中国古代数学史上重要的数学著作可以看出，《周易》往往被古代数学家们视作数学发展最早的源头，而且在一些主要的数学著作中，数学家们运用《周易》中的有关概念表述数学问题，对《周易》中数学问题及其相关问题进行深入的研究，取得了重要的数学成就。这一切足以表明《周易》对古代数学发展具有非常重要的影响。[18]

而李申先生在朱伯崑先生主编的《周易知识通览・易学与数学》中，则有截然相反的结论，他认为：

> 在中国古代，数学本来就被当做小道末技。而在数学内部，又把易数，通神明放在首位。真正的数学，只能在这双重压迫下艰难前进。纵观中国数学史，从《九章算术》的四则、乘方开方、勾股、比例等数学方法，到刘徽割圆术，祖冲之圆周率，秦九韶高次方程数值解法、天元术、程大位《算法统宗》所载完整的珠算法，加上其他较小一点的数学发现，可说没有一样是在《周易》和易数的影响、推动下做出的。相反，易数和数学的结合，总是成为数学发展的桎梏和绳索。[19]

如此看来，《周易》之于中国传统数学是毁誉参半，既功莫大焉，又罪莫大焉。不过，怎样才算是全面认识《周易》（包括揲算、易数和易学理论）对中国传统数学的影响，在中国古代数学史的研究中，应当是一个可以探讨的内容。

8.4.2 关于全举法

本书所说的全举法，是指列举出关于某个数学命题的全部可能出现的情形，然后归纳得出相应结论的论证方法。往往由于命题的设定在先，此时全举法事实上是一种验证性的方法。显然，只有在能够列举出全部可能出现情形的条件下，才能使用这种方法，因而全举法具有很大的局限性，比较适合于某些特殊命题的验证。在现代数学中，全举法表现为具体的枚举，由于并非演绎推理，因而一般不作专门的介绍，但在以相对简单的数算为主的古代，用全举的方法论证某些命题的例证则并不少见。例如前面提到的干支排序和九九乘法口诀，都显示出将所有可能出现的情形全部枚举出来的意义。再如八卦和六十四卦的演成，同样显示出是按既定规则依循全举思路得到的结果。或者说，八卦和六十四卦本身就是两个经由全举验证建立起来的特殊真命题。

在揲算中使用全举法的目的是检查这种算法的数学可行性，其应用是相当成功的。将全举法用于揲算命题的论证，虽然首见于唐初学者孔颖达对《易传·系辞上》所作疏文的记载，但笔者估计孔氏所录并不是当时的新发现，他极有可能只是对易学传人手传口授的西周占筮家们的古老做法作了整理和记录。当然，正是这一宝贵记录，为我们研究揲算提供了重要的材料。笔者作出这一估计的理由有三：

（1）具有寻求数学验证方法的动因

在揲算的定型过程中，西周占筮家们肯定接触过包括揲算类算法在内的多种具体算法，对于各种特殊命题性质的算法方案的数学可行性，有可能产生加以检查判断的想法，存在寻求数学验证方法的动因。由于这些用于占筮的算法方案既非演绎推证的结果，西周占筮家们也不具备足够的演绎推证能力，他们便只能从验证的角度依循全举的思路展开论证。

（2）具有实施全举法验证的操作条件

由于参揲策数有限，所有可能在揲算过程中出现情形的数量不多，构成也不复杂，

能够满足实施全举论证的基本条件。而且论证过程中涉及的数学运算，不超过50以内正整数的加减法，在缺乏演绎论证的条件下，只要思路清晰，将筹策依序摆出所有可能出现的情形，即可归纳得出这种算法是否可行的结论。所以西周时期的占筮家们对包含揲算在内的多种算法做全举论证在操作上是可行的。揲算本身具有精准无瑕的数学结构的事实，似乎也足以证明西周占筮家们对它进行过严格的全举核验。

(3) 具有应用全举法思路的一些经验

西周占筮家们对全举思路其实并不陌生，他们将这一思路发展为一种论证方法似在情理之中。考查原始的占筮，不难发现存在着萌生类似思考的条件或可能性。原始占筮中很可能使用过直接依据得数的奇偶判断吉凶的简单占法，筮者必然明白所得之数非奇即偶，全部情形仅此两种，占筮时二者必居其一，再无第三种结果，便显示出最简单的全举意识。尤其是远在传世揲算定型以前就已发明的与占筮无关的甲子干支排序和九九乘法口诀的编定等，似乎都可视为全举意识的产物。其他如八卦和六十四卦，以及长期流传于四川凉山彝族的“雷夫孜”占法[注2]（数学上等价于八卦的构成）等等，都显示出与全举思路有直接的关联。全举意识或全举法思路以其浅显直观的优点，出现于人类早期的数学思维之中，应是很自然的事情。

这样看来，孔颖达关于全举论证的记载，确有可能源于西周，并非唐代才出现的做法。西周占筮家们将全举意识用于各种算法方案的数学可行性验证是非常有可能的，他们的这种思路和做法事实上已构成了关于此类命题的一种论证方法，应视为数学论证方法的一种创新。全举法在占筮术中的应用标志着西周时期数学思维和论证方法的进步，对后来中国传统数学中算法化倾向的形成有一定的影响。可以说，全举法是中国古代数学史中值得注意的课题。

在现代数学中，古老的全举法有时也能派上用场。例如，在本书第3章3.2.2节中介绍罗见今先生的研究成果时，在论证用现代数学中的同余理论推得的“分揲定理”不能用于一般性揲算命题的过程中，所依据的就是全举分析的结果。这个结果给出的虽然只是“46策不能用于《易》占揲算”的一个具体例证，但是已经足以使我们认识到，由于约束条件的不同，不仅不宜用同余理论解读古老的揲算特例，而且应当另辟途径才能正确地归纳出一般性揲算命题的表述形式。

附带指出，本书所谓的全举法与数学中习用的穷举法和穷竭法是有差异的。穷举法更近于反证法，而穷竭法则接近于极限方法，但考虑的只是有限项。沈康身先生在《历史数学名题赏析》一书中的“穷竭法、穷举法与极限”一节中对这两种方法有所说明。[20]古希腊数学家欧几里德（Euclid，公元前330—前275）所作《几何原本》第十卷的命题Ⅹ·1给出了穷竭法的数学基础，并在Ⅻ·2和Ⅻ·5等多个命题中用于与面积或体积相关的证明。[21]魏晋布衣数学家刘徽在注《九章算术·商功》论及阳马术时所说“半之弥少，其余弥细”，是中国传统数学中使用穷竭法的典型代表。相比之下，全举法显得极其浅近而古朴，因而极有可能在中国传统数学的算法创制（即所谓“造术”）中有着更为古老而广泛的应用。

8.4.3 揲算与卜筮文化

从卜筮文化的角度看，一般认为商代盛行占卜，占筮则是比较次要的预测方法。这种情况似乎说明商代的占筮术还处于比较原始或粗糙的状况。西周时期，随着筮算方法的改进和用于释占的规范化经文的形成，占筮逐渐受到王室贵族的崇奉与重视。春秋战国时期，由于周室王权的衰微，以龟卜和《周易》为主的卜筮方法已摆脱了东周王室的控制而广泛流行于各诸侯国的宫廷和民间，龟卜虽仍有很大的影响，但呈相对减缩的态势。相比之下，以《周易》为主的占筮术的应用则有明显的扩张。刘瑛先生在《左传、国语方术研究》一书中就指出：

> 春秋前期有筮短龟长之说，可见占卜的地位很重要，但与此同时占筮的地位不断上升。因《周易》逐渐义理化，最终取代了其他占书成为惟一的标准占书，这也是春秋数术史上比较突出的现象。[22]

应当说，除了义理化因素之外，春秋时期显示出的占筮地位不断上升的现象还与技术性原因有关，主要表现为筮算方法和经文及卦象的配置已臻于完善，从而使《周易》占筮术的义理化进程有了稳定的载体依托。其中，占筮技术的发展与数学能力的进步有着密不可分的关系。到了汉晋时期，占筮方法基本统一于《周易》，而《连山》、《归藏》等不同占法逐渐被淘汰，龟卜的使用则更是逐渐减少。从此，《周易》占筮术便成为中国卜筮文化的主角。这种情况反映了商周时期人们探求神意以预测未来的卜筮途径，发生了逐渐由依据甲骨灼裂兆示的占卜术，向崇信数理通神的占筮术的转变。虽然这种转变只是由对甲骨拆裂现象的神秘崇拜逐渐过渡为对数和算法的神秘崇拜，仍属神秘文化的范畴，但却体现了卜筮文化的演化状态。或者说，体现了商周时期知识结构的一种进步。这种进步对后世神学与哲学的发展有着不可忽视的影响。一方面，可以肯定，数学知识的发展和应用对卜筮文化的演进起到了至关重要的推动作用；另一方面，这种知识结构的进步，还参与奠定了春秋战国时期形成百家争鸣局面的基础。在对中国传统文化和卜筮文化的相关研究中，这也许是一个可以探讨的内容。

8.5 关于早期筹算及商周数字与早期筹符的讨论

在已有的商周文物中发现的数字为我们认识那段历史时期的数学发展状况提供了重要的依据。其中的一些数字显示出当时已形成了简单的也是基本的运算概念和发明了实施求数计算的办法。这套办法肯定优于原始的点数计算，但又不大可能是使用数字和运算符号以书写方式进行的笔算。结合《周易》占筮术中的揲算以筹策为计算工

具，以及筹算在春秋战国时期已有广泛使用的情况，笔者推测，至迟在殷商时期已出现了早期筹算并传续于西周。早期筹算是从原始的点数计算发展到传世筹算的过渡形式。与原始的点数计算相比，早期筹算的先进之处在于采用了筹符和按位置记数的方法，一些进位量级较大或较复杂的求数运算应该是借助于早期筹算来完成的。与传世筹算相比，早期筹算中使用的筹符构形和具体的运算规则均处于由初创到成熟的发展过程中。这样，早在商周时期就已经出现了两种同属十进制的记数系统：一种是用于求数计算的早期筹符，另一种是用于事物数量记录的数字；前者是数学符号，后者是文字符号。

8.5.1　殷商和西周时期可能已出现了早期筹算

由于年代久远，遗迹湮没难存，古人最初的数学意识经由了怎样的形成过程，已不易查考。现代学者们综合了考古发现、古藉考证和民俗调查的结果，认为古人从知道分辨事物的多少（包括距离的远近和时间的长短），到直接点数事物的数量，再到学会基本的记数和简单的计算，历经了漫长的岁月。在这个过程中，工具的使用起着重要的作用。手指、草茎等天然物体，以及绳结、竹签，用于切口或刻划的竹、木、骨材，都可以用来做点数方式下的记数或计算的工具。如果涉数不多，计算要求也不复杂的话，用这些工具完成事物数量的清点或记录显然是古老而有效的办法。可以认为，像加法和减法这样最基础的运算概念正是在这种长期的点数计算应用中产生出来的。就数学思维的形成和发展来看，原始的点数计算涉及到的主要是数的概念，而运算的概念则相对后出。例如某人先有 2 只羊，后来又得到 3 只，他可以直接点数羊的只数得知已有 5 只羊，也可以用 1 根竹签代表 1 只羊，先在某处放上 2 根竹签，后又放上 3 根。凡是知道这一约定的人，在清点竹签的根数以后，都能知道此人的羊共有 5 只。在这里，记数及交流已不局限于记忆和语言，还可以借助于竹签之类的工具来完成。另一方面，虽然羊的主人事实上完成了一次加法计算，但却可以不去明确 2+3=5 的运算概念，只要具有关于数的概念就行了。可以认为，最为基础的加法和减法运算的概念都是在积累了一定的点数经验以后才逐步地形成的。

学者们在新石器时期和商周时期的出土文物中发现了不少数字，虽然这些数字的写法及表数规则往往并不规范统一，但一般都将它们归为一套用于记数的文字符号。观察商周数字，不难发现这套数字采用十进制记数法，基本的记数符号共有 13 个，其中一至九表示的是基础数量，而十、百、千、万表示的是进位量级（图 8－5）。由于没有表示数 0 的专用符号，一般认为这套数字还不是数学意义上的十进制记数系统，并称之为准十进制。不过，事实上，使用这套数字也能以正整数的形式对事物的数量进行语言和文字的描述而不会产生歧义。

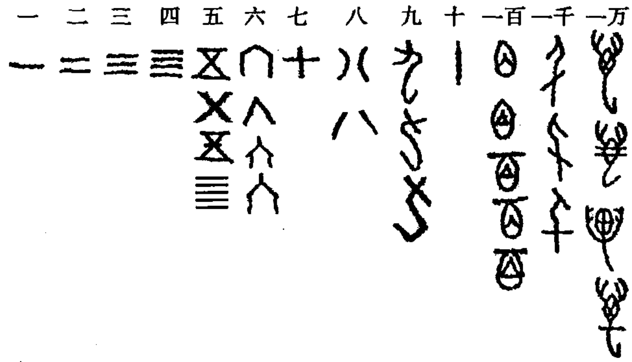


图 8—5 出现于商周甲骨文中的 13 种 基本数字

（引自邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》，其中亖（五）和/＼（八）为笔者所加）

商周文物中关于事物数量的记录很多，所涉都是正整数，最大的数为“三万”（郭沫若《殷契粹编》1171）。这些数字中有两种情况值得注意。一是有的数字记录的数量不仅较大，而且精确到了个位。例如“二千六百五十”和“三百又四十八”（罗振玉《殷墟书契后编下》43.9 和 41.2），以及西周康王时期的小盂鼎铭中的“万三千八十一”等等。二是一些成组的数字显示出数与数之间具有倍数关系。例如“五十犬……三十犬……二十犬……十五犬”（罗振玉《殷墟书契前编》3.23.6）。可以认为，这些数字表达的不是大概的数量，而是明确的数值，反映出殷商和西周时期的社会生活中已有了明确记数的要求，以及当时很可能已经出现了与加法和乘法有关的求数计算。当社会生活发展到一定的程度时，用原始的点数方式完成涉数较大的计算是既不方便又不可靠的，这就会促使人们发明出适用的计算办法。但是我们目前并不知道商周时期完成这类计算的办法具体是什么样子，只能依据已有的材料进行大致的推测。笔者认为，殷商时期已在点数计算的基础上发展出早期筹算，能够完成十万以内关于正整数的求数运算。周人灭商后，承续并推广了这种以筹策为计算工具的计算办法。具体讨论如下：

（1）**尚未找到商周时期用笔算求数的充分依据。**

用笔算方法完成求数计算，仅有像商周数字那样的数字符号是不够的，还需要设计出具有数学规范性的整套记数符号和配置相应的运算符号，其要求比使用数字和进位文字记录或描述数量严格得多。

在商周时期的文字记数系统中尚未发现表示数 0 的符号，这是商周记数文字中数学规范性方面的主要缺陷。正整数加法是最基础的求数计算，如果尝试用商周数字完成笔算形式的加法计算的话，不难发现，由于没有 0，有时会遇到进位计算不能正常进行的情形。显然，由于没有 0，在减法和乘除法的笔算运算中也会遇到同样的困难。在传世筹算中，这一困难是用在相应位置留出空格的做法来解决的。可见，在传世筹算的规则中已经建立了关于数 0 的操作型概念，所以，在传世筹算，甚至在早期筹算中

已形成了具有数学规范性的十进制下的位置值制记数法。不过，在记数文字中并不将空格视为一个数，因而也没有专门描述空格的对应文字。对商周数字中没有 0 的现象，较为合理的解释是商周文字中的记数系统并不用于笔算形式的求数计算。这也是迄今为止，学者们在商周文物中没有发现用运算符号（比如代表“加”和“等于”的符号）和数字构成的计算式，也没有发现与笔算相关的文字说明的主要原因。

殷商时期可能已经发明了九九口诀，虽然《周髀算经》中的“九九八十一”表示的是 $9\times9=81$，但却是对这一运算的口诀化的文字记录，不能视为笔算。作为口诀，“乘”的概念和“等于”的概念可予以简化，甚至不用通过具体的符号或文字加以表达。观察乘法口诀的构成，可知乘法运算的数学含义是经由事先的或附加的语言解释存在于算者的思维中的，因而其运算的形式可归之为心算而不是笔算。

“勾三股四弦五”的特例很可能是商人在数形关系方面的发现，从“两矩共长二十有五，是谓积矩”（语见《周髀算经》）的说法来看，应指 $3\times3+4\times4=25$ 的计算关系，商人似乎用“共”与“积”来描述加法和乘法的概念。不过，《周髀算经》中对这一数形关系的记载类似于口诀的形式，仍属于心算结果的文字记录，而不是笔算形式的文字表述。

一般情况下，完成笔算需使用书写工具。从甲骨文中有“册”字来分析，商代可能已有使用简牍记事的做法，因而当时存在着笔和颜料之类的书写工具也应该不成问题。不过，如果商周简有如战国简那样自上而下地逐字竖向书写的话，则可以想象这样的书写方式是不宜于完成笔算的。另一方面，甲骨文是契刻而成的文字，而金文一般是先雕刻模具然后冶铸而成的文字，也有在铸好的青铜器上契刻文字的情形，这些文字的书写都属于契刻类型。然而，若与文字极为简练的契刻记事相比较，能将算得结果记录下来就很不错了，因而采取契刻方式完成笔算的可能性并不大。笔者推测，商周时期人们不将书写或契刻工具，以及沙盘之类的写画工具用于笔算的主要原因，也许与当时的求数计算使用了更为适用的早期筹算，因而并没有发明笔算的需求有关。

看来，目前尚无证据可以证明商周时期出现了笔算，或者说，商周文物中那些由于量级较大需要通过计算才能得到的数字的求得应当另有它法，它们既不大可能是点数计算和心算的结果，也不大可能是用笔算方式算得的结果。这个办法很可能是早期筹算。

（2）**传世筹算是由早期筹算发展形成的。**

《老子·道经二十七章》有“善算不用筹策”之说，意为春秋战国时期的善算之人用的是心算，而普通人的求数计算需借助于筹策算具才能完成。在先秦古藉中还可以找到不少与筹策算具或筹算有关的说法。例如《论语·子路》中记有孔子“斗筲之人何足算”的话语，其中的“算”一般认为与筹算有关。虽然尚未发现与当时的筹算运行规则相关的文字记录或间接说明，但是学者们大都认为春秋战国时期已存在筹算，而且当时的筹算规则已与传世筹算相去不远。

传世筹算的最早记录见于《孙子算经》，钱宝琮先生研究认为，此书成于公元 400

年左右，但钱先生又指出："用算筹来记数和四则运算很可能在西周已经开始了。"（钱著《中国数学史》，科学出版社 1981 年版，第 3 页）

我们现在要解决的问题是殷商和西周文物中那些数值成千上万的数是怎样得到的。如果排除心算和笔算，比点数计算更先进的求数办法便很可能与筹算有关。结合周人向商人学习九九口诀和勾股计算等数学知识的情形（参看《周髀算经》中"商高答周公问"），将周人所用筹算的来源追溯于殷商的可能性也是存在的。当然，商周时期的计算内容不如春秋战国时期那样丰富多彩，商周筹算即使存在，其使用功能也可能还处于早期状态，包括用于记数的筹符形制和计算操作的规则，都应该没有发展到传世筹算的程度，不妨称之为早期筹算。

（3）《周易》揲算提供了古人以筹策为算具的例证。

筹算的特征是以筹策为计算工具，追寻筹策算具的应用情况，有助于今人对筹算起源的了解。从《周易》占筮术中的揲算使用蓍草筹策为算具的做法来看，在比《周易》更早的占筮术中已使用筹策算具完成筮算的可能性是很大的，这一判断可以用商周文物中发现的筮数予以佐证。考虑到占筮术的出现时期很可能早于商代，因而草茎、竹签应是一种古老的计算工具。另一方面，作为古人用点数的方式完成求数计算的工具之一，草茎、竹签还应该被用于日常的计算而不局限于筮算。似可认为，筹策类算具被经常性地使用，为早期筹算的发明提供了必要的条件。

应当指出，在筮算和揲算中，对筹策算具的使用始终保持着点数计算的原始形态。由于并不引入筹符记数的做法，因而谈不上筹算。由简单筮算向复杂筮算及揲算的演进，主要表现在算法环节的不断丰富和进行程序化处理方面。这种演进方向与占筮术的特殊要求有关，不能作为商周时期并未发明筹符的理由。筹符出现于用筹策完成的日常计算中，标志着古人对筹策算具的使用脱离了原始的点数计算及向早期筹算的演进。这种演进既与社会进步带来不断丰富的数算要求有关，也与筹策类算具在占筮术和日常生活中已有广泛的使用有关。当然，除了都使用相同的计算工具之外，揲算表现出来的算法化和程序化的数学思想，在处理生产、生活中遇到的数学问题时也有所体现则是非常有可能的，事实上，这类例子在传世的汉代算书中并不少见。

总之，如果那些量级达到了千和万的商周数字记录确与实际发生的数量相符，就说明当时的算者已有相应的计算能力，认为他们仍然采用点数方式求取这些数值是难以置信的。在对心算、笔算和筹算几种求数计算方式进行讨论之后，似乎可以形成商周时期使用的比点数计算更为先进的计算办法极有可能是早期筹算的判断。如果排除笔算，商周时期的计算办法大致有心算、点数计算和早期筹算三种类型。点数计算和心算用于涉数不多的情形，是人们形成数的认识和完成基础计算（例如九九口诀）不可缺少的方式，直至今日仍在使用。当事物的数量较大，或者涉及的计算较为复杂时，就要在点数计算和心算的基础上，依靠早期筹算才能快捷而可靠地完成相关的求数计算。

8.5.2 关于商周数字和早期筹符的讨论

使用早期筹算完成的计算相对简单，具体规则也可能并没有发展到传世筹算那样成熟的程度。由于我们对早期筹算的规则和筹符形制尚无确切的了解，只能在概念上认为早期筹符和传世筹符都属于筹算形式下的记数符号，因而本节的讨论并不对这两种筹符做具体的区分。此外，本节论及的数字局限于在商周文物中发现的记数文字，而不涉及天干地支之类专用的排序字符。

(1) 商周时期已出现了关于数 0 的操作型概念

十进制是以 10 为进率的记数系统，中国古代采用十进制记数的原因也许与用手指点数时共有十个手指头可供使用有关。十进制表数方法的使用最早似应出现于语言交流中对事物数量的描述。早期表数词汇的量级可能不大，古人能够对简单的数量进行准确的语言交流已经是一个非常大的进步，而数字的发明和使用则代表着中国的古代文明获得了重要的发展。到了商代，甲骨文和金文中的数字证明当时的记数能力已突破了百位，并形成了千和万的进位概念，记数文字的完善和丰富显示出存在着相应的求数算法。

相对于表数语言，筹符和数字都是后出的事物。筹符源于筹策算具的使用，筹符的出现是从点数计算演进为早期筹算的重要标志。在用筹策完成的点数计算中，一根筹策只代表数 1，计算对象的数量与筹策的根数相对应，涉数达到百位以上时，需要的策数必然很多，在实用计算中既不方便也不可靠。如果将筹策摆放成与表数语言相对应的数码符号，并做出进位安排，就可以将这种记数方法应用于早期筹算，从加法开始，逐步地发展到能够用来完成正整数的四则运算。注意到即使是在完成最基本的百以内自然数的加法运算时，所采用的记数方法也必须具有数学上的规范性，因而笔者推测，在早期筹算中需要设置也已经配齐了代表数 1～9 的基本筹符，并且建立了包括用空格表示数 0 在内的位置值制进位规则。此外，在筹符表数方法中，与十、百、千、万等表示进位量级的词汇相对应的数量读出规则也应逐步形成。

根据学者们从新石器时期的刻符和商周文字中识别出来的数字的形态，似可推测它们是由原始的刻痕记数发展而成。古人从用对应数量的刻痕来记录事物的数量，发展到用专门的符号记数，是个很大的进步。最早转化为数字的可能是一、二、三、亖、𠄡[注3]这几种刻痕。作为数字，这几个符号只在构形上保留着原始的点数记数的意义，而被赋与了专用的表数符号的性质。可是亖、𠄡以及再用数量增多的刻痕表示更大的数就不方便了，这就促使人们发明出专门用来表示四、五、六、七、八、九诸数的符号。与筹符记数相比较，基本的商周数字只有表示一至九的九个表数文字，没有配置表示数 0 的符号，并且在书写时也不留出空格以表示数 0。在这种情况下，使用商周数字仍能准确地表达事物的具体数量，关键在于附有十、百、千、万等表示进位量级的文字。而且，在读出用这套表数文字记录的某个数时，不仅与所使用的包括量级在内的表数语

言中的词汇相对应，还可以与用筹符数码表出的这个数相协调。或者说，对筹符数码中表示数 0 的空格，使用这套数字可以在既无专用的语言词汇、又无对应的文字符号的条件下正确地完成数量表述，能够满足当时的需求。筹符和数字是商周时期使用的两套不同构形的记数符号，它们都属于十进制记数类型。如果因为没有表示数 0 的文字符号而认为商周数字属于准十进制的话，那么，由于采用了操作型的数 0（空格），即使是早期筹符也应当属于具有数学规范性的十进制记数系统。虽然存在数学规范性方面的差异，但是由于没有数学和语言逻辑方面的实质性矛盾，筹符和数字完全可以协调并存。

筹符是筹算中用筹策算具在平板上摆成的记数符号，图 8—6 是摹画的传世筹算中所用筹符的式样，有纵式和横式两种类型，分别用于十进制下奇数位和偶数位的记数。早期筹符是否具有类似构形目前尚不清楚，不过，从十进制下位置值制记数方法的要求来看，至少要配齐可以明确表示 1～9 的基本筹码才行。联系商周文物中数字一、二、三、𝍬、𝍭的写法，很可能早期筹符的式样接近于传世筹符中的横式筹符。

纵式筹符	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式筹符	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
对应数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9

图 8-6　传世筹符的式样

由于采用位置值记数，故不必设置代表数 0 的筹符。以数 26683 为例，用传世筹符表出的情形就是 𝍡 𝍮 𝍥 𝍰 𝍢。若遇某个位置处的数值为 0，则将该位置留为空格，这就是前面提到的在筹算中存在关于数 0 的操作型概念。例如 20683，就摆成 𝍡 　 𝍥 𝍰 𝍢 的形式。如果用商周数字将上述两数记录下来，可以写为二万六千六百八十三和二万六百八十三。显然，在配置了描述进位量级的语言词汇或文字的情况下，即使不引入数字 0，或者不在文字书写时留下空格，同样能正确表达相应的数值而不会引起歧义。这两种与位置值制有密切联系的记数系统可能至迟在殷商时期就出现了，并传续于西周。例如殷墟甲骨文中的“百日有八”（《甲骨文合集·5》第 1996 页，第 14047 片）和西周小盂鼎铭文中的“万三千八十一”（图 8—7）即是 108 和 13081 两数的文字记录。如若数值 13081 是使用早期筹算计算得到的结果，就应当存在过此数的筹符形式，只是由于我们现在尚难确定当时筹符的具体摆法，故不能肯定其筹符形式就是 𝍠 𝍫 　 𝍰 𝍠，这里用传世筹符将此数摆出，只是一种参考。

图 8－7 西周小盂鼎铭中的数字（“万”字有残损）
（引自邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》）

(2) 筹符和数字在使用上有明确的分工

考古发掘见到的筹策已有多起，以战国时期的筹策为最早。由于不易保存，更为古老的筹策实物的出土机会可能不多，显然，要想看到实物形态的商周筹符几乎是不可能的。筹符是用筹策摆成的数学符号而不是文字，运算中筹符随摆随用，用后即撤，计算结果并不以筹符的形式保存。由此可见，若不做摹画记录和文字说明，时间一长，后人弄不清以前的筹符形态是很自然的事情。由于在商周文物中迄今还没有发现确凿的摹画筹符和与筹符有关的文字说明，因而早期筹算中使用的筹符与传世筹符有何异同目前并不清楚。笔者推测，商周文物中一般并不摹画筹符的原因可能与做数量记录时另有一套数字符号有关。这就显示出，早期筹符和数字在使用上存在着分工：前者用于计算，属于数学符号；后者用于记录，属于文字。

筹符用于求数计算，存在严格的数学要求，其形制和运算操作规则都必须明确适用且没有歧义。参考《周易》揲算，虽然揲算中没有使用筹符，但作为一种求数算法，同样反映出严密无瑕的数学结构。想必早期筹算中的运算规则也很严谨，并采用了一套具有数学规范性的早期的筹符记数系统。在这套筹符记数系统中应当已经发明了用空格表示数 0 的位置值制。因为只有这样，才能顺利地完成有进位要求的运算，即使只做最基本的正整数加法，也是如此。或者说，即使没有将 0 视为一个数，但是关于数 0 的操作型概念在殷商时期的早期筹算中可能就已经出现了。

从现今已知的情况看，商周时期的数字在使用功能上通常用于事物数量的文字描述或排序，并不用于笔算，它们在性质上属于文字而不是数学符号。商周数字既可以用来表示大概的数量，也可以是准确数值的记录。此外，排序也是常见的用法，例如甲骨卜辞的兆序，王年祀序及纪月等等。在《易经》中，爻题排序也使用了数序。比较特殊的是筮数，它们是筮算中点数计算结果的文字记录，虽然是与任何具体事物都没有联系的抽象的数，但同样不能视为数学符号。

数字用于记录，只要关于数量的表达无误就行，不象用于运算的筹符那样必须具有严格的数学规范性，这就为数字的契刻或书写提供了一定的灵活变通空间。观察商

周数字，在前后两个数字之间除了标出十、百、千、万等表示进位的文字外，还可以加入“又”、“有”之类的副词甚至是名词。例如 348 可写为“三百又四十八”（《甲骨文合集·11》第 4124 页，第 33371 片），而“百日有八”（《甲骨文合集·5》第 1996 页，第 14047 片）则释为 108 日等等。在筹符数码中，用空格表示数 0 是不可忽视的。但在书写数字时，既不引入 0 也不留空格，仍能无歧义地描述事物数量，其数学规范性无须十分严格。此外，商周数字中还普遍地存在着合文或合书的形式，即把两个或多个字符合写为一个整体（图 8-8）。显然，合书的记数形式不宜用于笔算，尤其是百以内的数字，合书形态较多并不统一。例如二十，按字符写出时为 亍（从上向下书写），而合文则有 ‖、⋃、⊔ 等多种形式。这些写法的含义都是两个 |（十），读出来似乎都是二、十两字的读音。它们在数量的描述上是一致的，可是在书写时却由于各种可能的原因而有多种形式，显得缺乏统一的规范性。这些观察表明，商周数字的书写形式很难满足笔算要求，其原因可能与商周数字并不用于笔算有关。不妨设想，中国古代若广泛采用笔算的话，那怕是在沙盘上完成的笔算，也肯定会发展出一套适用的，且符合数学规范性的数字。

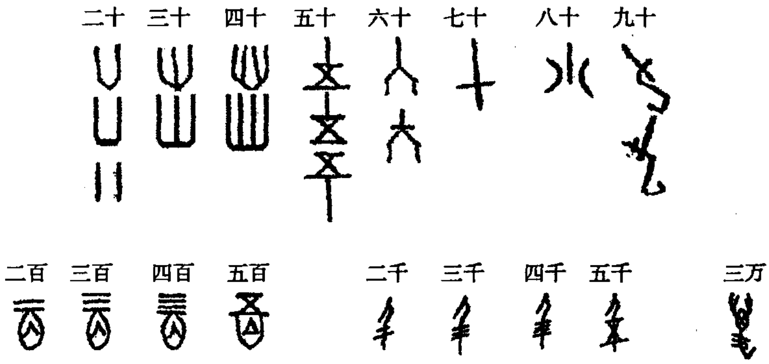


图 8-8　合书形式的商周数字举例

（引自邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》）

一般情况下，尽管在思维逻辑和语言表述中是协调的，但可以认为商周时期的筹符和数字分属两个既相对独立又密切相关的记数系统，它们在使用上有明确的分工：筹符是数学符号用于计算，而数字是文字用于记录。

（3）筹符和数字经历了大体上同步的形成过程

虽然在商周文物中没有发现摹画筹符的确凿例证，但曾经存在于早期筹算中的筹符并非毫无踪迹可寻。例如，商周文字中的数字一、二、三、亖与传世的横式筹符中的这几个数码符号完全相同，以及数十、二十刻写成 |、‖ 的情形也许值得考虑。很可能在早期筹算中这些数的筹符摆法便是这种式样。这就自然会生出筹符和数字哪一个出现得较早，以及两者之间有没有从出关系的问题。

在徐中舒先生主编的《甲骨文字典》（四川辞书出版社，2003 年版）中，对数字一的解字为：

卜辞由一至四，字形作一、二、三、亖以积画为数，当出于古之算筹。

在解释数字丨时，又说：

古代之算筹，竖置一筹表示数量十，以与横置之算筹一区别。

按徐先生的解释，似乎可以将“古之算筹”（应指早期筹符）的发明溯源于殷商或殷商以前，并且可以得出商周甲骨文中出现的这几个数字源于早期筹符的判断。

与徐先生的解释不同，王建青先生在《算筹记数思想》（载于《第七届国际科学史会议文集》，郑州大象出版社 1999 年版）一文中认为：

利用甲骨文记数时如果简化掉单位词也可以产生位值制。

其中的“单位词”是指十、百、千、万等表示进位单位的文字。王先生在他所举的例子里将一千九百九十五年简记为一九九五年，以说明可以按各数所在位置来确定所表示的数值。显然，若将数字换成筹符数码，就可以转变成筹符表数的形式。所以王先生认为算筹记数的位置值制思想可以由甲骨文中的数字导出。这样，便可以得出筹符记数源于商周数字的判断。

关于筹符和数字发明过程中的从出问题，徐、王二位先生提出的判断都有合理之处，可是却难于否定对方。如果要想将这两种不同的判断协调起来，采取筹符和数字的起源大体上同步的思路，也许是一种值得考虑的方式。笔者推测，在古人关于数的概念的形成过程中，不论使用什么样的工具，计数和记数的功能往往是兼而有之、难于分清的，在涉数不多的点数计数条件下尤其如此。比如，每过 1 天就在某个指定的地方放 1 根竹签，或者在树干上划出 1 道刻痕，5 天以后，就分别有 5 根竹签或 5 道刻痕，它们都是累加计算的结果，同时也是天数的记录，计数和记数并无明确的分工需求。这种情形在筮算或揲算的点数计算中也观察得到（参看本书第 3 章的 3.2.1 节和第 4 章的 4. 5 节），不同之处仅在于最后算得的结果用筮数（即当时使用的数字）或卦象来记录。随着生产力的提高，社会生活内容日渐复杂，所涉事物的数量增多，使计数和记数的量级渐次突破了十位和百位。在这个过程中，关于数量的计算和记录逐渐分离，出现了竹签多用于计数而刻痕更便于记录的分工趋向。很可能至迟在商代，因计算的需要发明出用早期筹符记数的早期筹算，而因记录的需要则从刻痕方式中发展出早期的数字。其间，早期的筹符和数字处于既相互影响又相互独立的大体上同步演进的状态，所涉数量的量级也对应地由小变大。这两种记数系统既各有分工，又协调并存，从而表现出“你中有我、我中有你”的特征，应当是可以理解的。

①一位数的情形。

就符号形态来看，一、二、三、诸数构形简单直观，含义浅显明确，既可用筹策摆成，又便于契刻写出，在早期筹符和数字中都被采用的可能性是很大的。就数字而言，这些数字的构形一直沿用到西周，尤其是其中的三、亖这三个字符在整个汉字的演化形成过程中都保留了不变的构形。而在传世筹符中，一、二、三、亖、𝍭为横式，用于偶数位记数，｜、‖为纵式，用于奇数位记数。如果早期筹符的用法是横式用于个位而纵式用于十位，便显示出早期筹符与传世筹符在使用上的不同。这种不同也许是在早期筹算演进为传世筹算的过程中，筹符记数的具体规则发生了调整或者变化的结果。作为数字，亖多契写为×或⊠，而在西周金文中观察到四、十两数的写法有从亖、｜演变而成的情形，都应该看作是对已有数字在符号构形上的改进。这种改进或多或少地抹去了这些数字曾与早期筹符有可能互通的痕迹，使我们更加难于发现它们与筹符之间存在过怎样的关联。

五、六、七、八、九诸数在商周文字中已表现出相对独立的构形，即使它们的某些写法可以用筹策摆成，例如×（五）、∧（六）、十（七）、/\（八）等等，显示出与筹策算具似有某种联系，但仍难于认为这类写法是对当时所用筹符的摹写，更不能在筹符和数字的从出关系上据以得出相应的判断。

②两位数的情形。

筹符和数字之间可能有一定关联的情形在一些两位数数字的写法上也有所表现，表 8－1 列出了部分例子。从构形上观察，这些数字可以用筹策摆出，而且均由一、二、三、亖、𝍭和｜搭配构成。表中前 4 种数字符号被学者们释为两位数的十一、十二、十三和十四，而并不参照传世筹符的摆法释为一位数的六、七、八、九。这样，按照从高位向低位的顺序，这种由上至下或由左至右的表数方式显示出两位数的位置关系，但它们是否出于对当时的筹符数码的摹写，或者反过来，认为筹符数码的形成是否源于这类数字，仍难加判断。

表 8－1　　商周时期的一些两位数的数字[注4]

	甲骨文						金文
商周数字	丨一	丨二	丨三	丨亖	二丨	三丨	丨三
释文	十一	十二	十三	十四	二十	三十	十三
例数	5	1	1	2	1	2	1

商周时期用数字一至十四纪月（含闰月），其中十一月到十四月多为合书（参看图 8－9）。如果学者们的识读不错的话，这些纪月数字也都是用一、二、三、亖和｜搭配构成。其读数顺序除了由上至下和由左至右之外，还有由下至上和由右至左的情形。显然，即使它们的构形与筹符有某种关联，也同样难于判断两者之间的从出关系。

图 8—9 商周时期合书的纪月文字

（引自吴文俊主编《中国数学史大系·第一卷》）

上述诸例表明，作为数字演进过程中曾经出现过的字形，比照于传世筹符的记数形式，可以观察到位置值制记数法的端倪。不论这些两位数数字是否出自对那时所用筹策数符的摹写，似乎可以认为，殷商时期在两位数记数方面，契写数符和筹策数符的构形很可能是互有关联的。

③多位数的情形。

笔者推测，在涉数突破两位数，达到百、千、万量级的过程中，古人应已掌握了正整数的加减法运算，以及与九九口诀相关的乘除法运算，而且，这些运算很可能是用早期筹算的办法完成的。与此同时，多位数数字在两位数数字的基础上也逐步形成，它们的功能主要是数量的记录。筹符用于计算，数字用于记录的分工随之渐成惯例。

观察商周文物中量级达到了百、千、万的那些数字，不难发现，这些数字和筹符的联系已不表现于构形方面，而主要反映于与进位密切相关的数学规律中。可以认为，与记数文字相对应，必然存在着十进制下的思维逻辑和表数语言。因而筹符和数字的使用规则都应当是在十进制表数语言的约束下建立起来的。筹符和数字可以有不同的符号形状，但在表达同一个数值时，应有协调一致的读音和语义。参考传世的筹符表数形式，筹符数码只需按位置摆出，不必配置位置符号。而书写数字时除配有进位文字之外，还有加上“又”、“有”之类副词的情形，似有口语化的痕迹，应与语言中的表数方式有关。这样，既可以认为筹符表数的位置值制思想可由删去数字中的进位词汇导出，同样也可以认为数字记录的是读出形式的筹算结果。像这样去判断筹符和数字的从出关系虽有一定的道理，但显然都缺乏充分的依据。

笔者倾向于认为，在相同的思维逻辑和所用语言的约束下，筹符和数字是中国古代特有的，由简到繁地同步演化形成的两种十进制记数系统，它们各有分工，协调并存，自初创时起，便难于分辨两者的从出关系应在情理之中。

注 释：

［注 1］ 参看李学勤《周易溯源》（巴蜀书社 2006 年 1 月版）第 185 页。从已知筮数的构成上观察，可以认为，在商周时期的占筮术中很有可能存在多种不同的具体方法。这种在同一类占问术中存在着多种具体方法的现象应该是比较普遍的，例如在占卜术中也可能有多种不同的类型。李学勤先生就说：“商周甲骨有许多根本性的差别，应该认为是两种不同传统的卜法。”不仅“西周甲骨不是殷

墟甲骨的直接延续”，而且“殷墟甲骨细分起来，其实也有不同的卜法传统”。

［注 2］　汪宁生先生在《八卦起源》（《考古》，1976 年第 4 期，第 243 页）一文中有下述记载：与古代筮法最相似的还要算四川凉山彝族的占卜方法，故有必要详做介绍。此法名为“雷夫孜”，其具体情况是这样的：“毕摩”（彝族巫师）取细竹或草秆一束握于左手，右手随便分去一部分，看左手所余之数是奇是偶。如此共行三次，即可得三个数字。有时亦可不用细竹或草秆，而用一根木片，以小刀在上随便划上许多刻痕，再将木片分为三个相等部分，看每一部分刻痕共有多少，亦可得出三个数字。然后“毕摩”根据这三个数是奇是偶及其先后排列，判断“打冤家”（过去彝族奴隶主操纵下的一种械斗）、出行、婚丧等事。

由于数分两种而卜必三次，故有八种可能的排列和组合，即共有八种答案。关于这八种排列组合情况，何者为吉，何者为凶，是因事而异的，而且各个地区或家支解释亦有所不同。随着宗教迷信的破除，现在会做具体解释的人已不多，1960 年我们在凉山调查时想做详细了解即很困难。然解放以前有人曾记录一套卜问“打冤家”的解释方法（原注：徐益棠等：《打冤家——罗罗氏族间之战争》，《边政公论》第 1 卷第 7～8 期，81～82 页）兹摘录于下，以见一斑：

偶偶偶——不分胜负（中平）。

奇奇奇——非胜即败，胜则大胜，败则大败（中平）。

偶奇奇——战斗不大顺利（下）。

奇偶偶——战必败，损失大（下下）。

偶奇偶——战斗无大不利（中平）。

偶偶奇——战斗有胜的希望（上）。

奇奇偶——战斗与否，无甚影响（平）。

奇偶奇——战必胜，掳获必多（上上）。

每当“打冤家”之前，常要以“雷夫孜”法决定行动。如遇上卦，当然要打。如遇中卦或下卦，则要考虑打不打的问题了。

［注 3］　吴文俊先生主编的《中国数学史大系・第一卷》（北京师范大学出版社 1998 年 8 月版）指出：在西安半坡出土陶器的刻符中，“被辨认出来的数学符号有‘X’（五）、‘∧’（六）、‘十’（七）、‘/\’（八）、‘|’（十）‘‖’（二十）等六个。”（第 130 页）而在青海柳湾新石器遗址出土彩陶上的彩绘符号中有“一、二、三、亖、☰、∧”（第 131 页）等符号，它们依次被释为数字一、二、三、四、五、六。在马如森先生的《殷墟甲骨文实用字典》（上海大学出版社 2008 年版）中，也将☰（《甲骨文合集・38421》）释为五。

［注 4］　表中所引用的材料来源于吴文俊先生主编的《中国数学史大系・第一卷》的第二编第二、三两章，以及邹大海先生所著《中国数学的兴起与先秦数学》的第二章第二节。

参考文献：

［1］李俨. 中国古代数学史料. 北京：中国科学图书仪器公司，1954. 3～5

［2］徐凤先. 帝乙祀谱、帝乙在位年与商末岁首. 自然科学史研究，2004（3）：190，191

［3］吴文俊. 中国数学史大系・第一卷. 北京：北京师范大学出版社，1998. 168～192

［4］张家山二四七号汉墓竹简整理小组. 张家山汉墓竹简. 北京：文物出版社，2006. 129～157

［5］邹大海. 中国数学的兴起与先秦数学. 石家庄：河北科学技术出版社，2001. 82

［6］钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1964. 3，14

［7］严敦杰. 关于西汉初期的式盘和占盘. 考古，1978（5）：334～337；殷涤非. 西汉汝阴侯墓

出土的占盘和天文仪器．考古，1978（5）：338～343

[8] 吴文俊．中国数学史大系·第一卷．北京：北京师范大学出版社，1998．193～210

[9] 段耀勇．先秦数学史研究的新进展．自然科学史研究．2004（2）：168～172

[10] 邹大海．中国数学的兴起与先秦数学．石家庄：河北科技出版社，2001．63，72，82，103，104，171，172，177

[11] 李零．中国方术续考．上海：东方出版社，2001．305

[12] 朱伯崑．周易知识通览．济南：齐鲁书社，1993．741

[13] 邹大海．中国数学的兴起与先秦数学．石家庄：河北科技出版社，2001．110，111

[14] 邹大海．中国数学的兴起与先秦数学．石家庄：河北科技出版社，2001．110

[15] 李文林．数学史概论．北京：高等教育出版社，2002．104

[16] 邹大海．中国数学的兴起与先秦数学．石家庄：河北科技出版社，2001．501

[17] 李文林．数学史概论．北京：高等教育出版社，2002．104

[18] 乐爱国．周易对中国古代数学的影响．周易研究，2003（3）：76～78

[19] 朱伯崑．周易知识通览．济南：齐鲁书社，1993．746

[20] 沈康身．历代数学名题赏析．上海：上海教育出版社，2002．1138～1141

[21]（古希腊）欧几里德．几何原本．燕晓东编译．北京：人民日报出版社，2005．361～363，557～565

[22] 刘瑛．左传、国语方术研究．北京：人民文学出版社，2006．196

附录

三项棱锥中三项展开式系数的一些性质和递推关系*

笔者在研究《周易》中的数学问题时，受其启发，发现可以利用“三项棱锥”列写三项展开式的各项（参看本书第2章的2.3.7节），并得到一些有趣的结果。

1. 三项棱锥的构造和三项展开式的列写

对于 $(a+b+c)^n$，n 依次为 0，1，2，3…时，其展开式的项数为递推数列 $\{a_n\}$，$a_0=1$，$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+(n+2)$。故 n 次三项展开式有 $a_n=(n+1)(n+2)/2$ 项。

在一个如同贾宪三角那样的三角形平面网格中，从顶点到底边共有 $n+1$ 行格点时，逐行的格点数为等差数列 $\{b_n\}$，$b_0=1$，$b_1=2$，$d=1$。可知，在这个三角形平面网格中，$n+1$ 行格点的个数共有 $S_{n+1}=(n+1)(n+2)/2$ 个。

由于 $S_{n+1}=a_n$，就可以用 S_{n+1} 个格点来标识 $(a+b+c)^n$ 展开式的 a_n 个项而保证不重不漏，也无空置的格点。列写规则是将 $(a+b+c)^n$ 展开式中 a^n、b^n、c^n 三项置于平面三角网格的三个顶点，然后依 a、b、c 的降幂（升幂）沿网格线逐格列写各项，直到将 a_n 个项全部填入 S_{n+1} 个格点。对于 $(a+b+c)^0=1$，此时网格收缩为一个点。图1列写了 $n=0$，1，2，3 的情形。当 n 值逐一增大时，不难将各展开式各项填写入对应的三角形网格中。

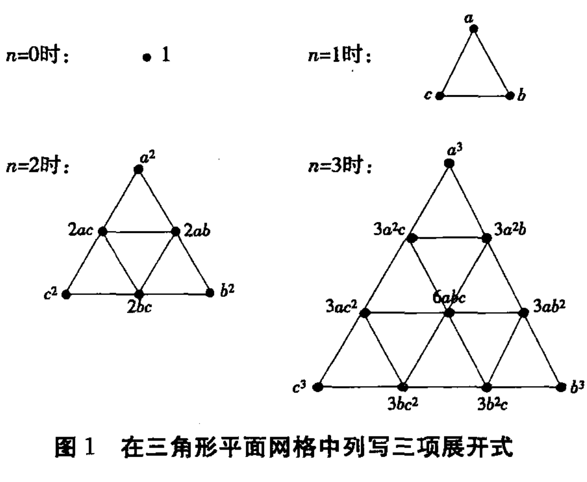


图1 在三角形平面网格中列写三项展开式

* 本文为笔者与贵阳市体育中学的张明明老师合作完成，2010年7月在《贵州师范大学学报》刊出。

将这样列写的网格三角形从上至下顺序叠置于一个正三棱锥中，即可得到一个三项棱锥。图 2 是一个 3 次三项棱锥。选用正三棱锥的形式，可以较方便地反映这种列写规则下展开式的各项在字母轮换和数字对称方面的特点。

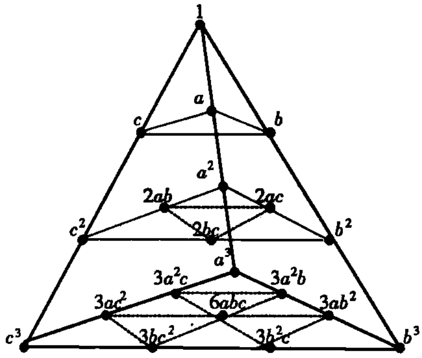


图 2　3 次三项棱锥

2. 三项棱锥中三项展开式的通项

若将三项棱锥置于正交坐标系 $O-xyz$ 中（图 3），用 $Z_{i,j,k}$ 表示 n 次三项棱锥中第 k 层、第 i 行、第 j 列格点处的三项式系数，则可使用格点坐标进行相关描述。

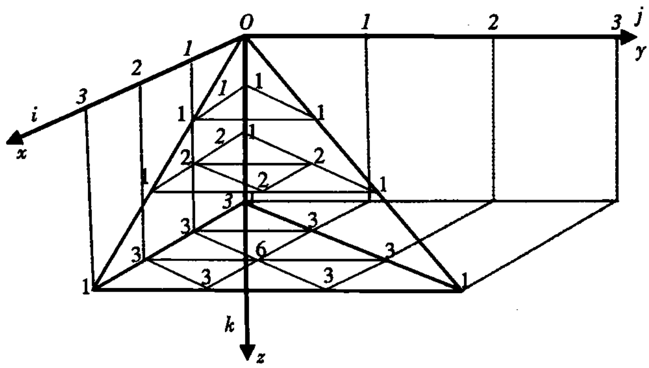


图 3　$O-xyz$ 坐标系中的 3 次三项棱锥（只列写了系数）

下面将三项展开式的通项写成格点坐标的形式：

已知 $(a+b+c)^n$ 展开式的指数形式的通项为：

$$\frac{n!}{p!\ q!\ r!}a^p b^q c^r \qquad (p+q+r=n)。$$

根据三项棱锥中三项展开式的列写规则，指数 n、p、q、r 与坐标 i、j、k 之间的转换关系为：

$$n=k,\ p=n-i=k-i,\ q=j,\ r=n-p-q=i-j。$$

故通项可以写为

$$\frac{n!}{p!\ q!\ r!}a^p b^q c^r = \frac{k!}{(k-i)!\ j!\ (i-j)!}a^{k-i}b^j c^{i-j} \quad (k \geqslant i \geqslant j \geqslant 0)。$$

根据组合数理论，上述通项的系数可表为：

$$Z_{i,j,k} = \frac{k!}{(k-i)!\ j!\ (i-j)!} = \frac{k!}{i!\ (k-i)!} \cdot \frac{i!}{j!\ (i-j)!} = C_k^i C_i^j$$

可知三项棱锥中三项展开式的通项可表示为：

$$C_k^i C_i^j a^{k-i} b^j c^{i-j} \quad (k \geqslant i \geqslant j \geqslant 0)。$$

3. 三项棱锥中三项展开式系数的一些性质

性质 1：$\sum\limits_{k \geqslant i \geqslant j \geqslant 0}^{n} Z_{i,j,k} = (3^{n+1}-1)/2$。

该性质给出了 n 次三项棱锥中所有系数的和。

证明：三项棱锥中的第 k 层格点对应于 $n \geqslant k$ 时的展开项，即：

$$(a+b+c)^k = \sum_{i \geqslant j \geqslant 0}^{k} Z_{i,j,k} a^{k-i} b^j c^{i-j} \quad (n \geqslant k \geqslant i \geqslant j \geqslant 0)。$$

令上式中 $a = b = c = 1$，可得 $\sum\limits_{i \geqslant j \geqslant 0}^{k} Z_{i,j,k} = 3^k$。

由于 $\sum\limits_{k=0}^{n} 3^k = (3^{n+1}-1)/2$，故对 n 次三项棱锥的所有系数求和，得：

$$\sum_{k \geqslant i \geqslant j \geqslant 0}^{n} Z_{i,j,k} = (3^{n+1}-1)/2。$$

证毕。

性质 2：①$Z_{i,j,k} = Z_{i,i-j,k}$，

②$Z_{i,j,k} = Z_{k+j-i,j,k}$，

③$Z_{i,j,k} = Z_{k-j,k-i,k}$

其中 $k \geqslant i \geqslant j \geqslant 0$。

该性质表明，三项棱锥中位于任意一条平行于 xOy 平面的网格线上的系数的数值和位置关于该条网格线的中点对称。

证明：关于系数数值的对称性：

对于 ① 有 $Z_{i,i-j,k} = C_k^i C_i^{i-j} = C_k^i C_i^j = Z_{i,j,k}$。

对于 ② 和 ③ 只需对字母 a、b、c 进行轮换即可获证。

关于格点位置的对称性：

对于 ①，考虑 $A(x=i, y=j)$ 与 $A_1(x_1=i, y_1=i-j)$ 两点；

对于 ②，考虑 $A(x=i, y=j)$ 与 $A_2(x_2=k+j-i, y_2=j)$ 两点；

对于 ③，考虑 $A(x=i, y=j)$ 与 $A_3(x_3=k-j, y_3=k-i)$ 两点。

在这三种情形下，容易证明 A 点分别与 A_1、A_2、A_3 点落在对应的一根网格线上，且它们分别关于所在线段的中点对称（证明从略）。

证毕。

性质 3：①$Z_{i,0,k}=Z_{i,0,k-1}+Z_{i-1,0,k-1}\quad(k>i>j=0)$，

②$Z_{j,j,k}=Z_{j,j,k-1}+Z_{j-1,j-1,k-1}\quad(k>i=j>0)$，

③$Z_{k,j,k}=Z_{k-1,j,k-1}+Z_{k-1,j-1,k-1}\quad(k=i>j>0)$。

证明：对于①，有 $Z_{i,0,k}=C_k^iC_i^0=C_k^i$，

而 $Z_{i,0,k-1}+Z_{i-1,0,k-1}=C_{k-1}^iC_i^0+C_{k-1}^{i-1}C_{i-1}^0=C_{k-1}^i+C_{k-1}^{i-1}=C_k^i$

故 $Z_{i,0,k}=Z_{i,0,k-1}+Z_{i-1,0,k-1}\quad(k>i>j=0)$。

同理可证②、③两式成立。

证毕。

事实上，在三项棱锥中，$j=0$ 时的格点对应于 $(a+c)^n$ 的展开式，$i=j$ 的格点对应于 $(a+b)^n$ 的展开式，$i=k$ 的格点对应于 $(b+c)^n$ 的展开式。这些格点分别位于三项棱锥的三个侧面上。或者说，在三项棱锥的三个侧面格点处的系数均分别构成贾宪三角。如果考虑边界条件：$Z_{0,0,0}=1\quad(k=i=j=0)$、$Z_{0,0,k}=1\quad(k>i=j=0)$、$Z_{k,0,k}=1\quad(k=i>j=0)$、$Z_{k,k,k}=1\quad(k=i=j>0)$，由本性质，可在三项棱锥的三个侧面上建立二项展开式系数的递推关系。

性质 4：$Z_{i,j,k}=Z_{i,j,k-1}+Z_{i-1,j,k-1}+Z_{i-1,j-1,k-1}\quad(k>i>j>0)$

证明：$Z_{i,j,k-1}+Z_{i-1,j,k-1}+Z_{i-1,j-1,k-1}$

$=C_{k-1}^iC_i^j+C_{k-1}^{i-1}C_{i-1}^j+C_{k-1}^{i-1}C_{i-1}^{j-1}$

$=C_{k-1}^iC_i^j+C_{k-1}^{i-1}(C_{i-1}^j+C_{i-1}^{j-1})$

$=C_{k-1}^iC_i^j+C_{k-1}^{i-1}C_i^j$

$=C_k^iC_i^j$

$=Z_{i,j,k}\quad(k>i>j>0)$。

证毕。

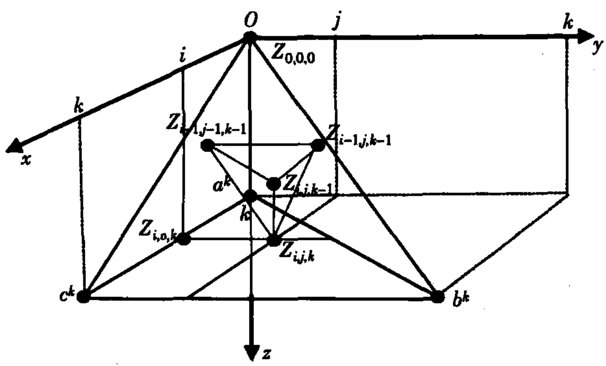


图 4 性质 4 示意

该性质表明，在三项棱锥内部（不含三个侧面）第 k 层上某个格点处的系数值，等于第 $k-1$ 层与之相邻的三个格点（含边界上的格点）处的系数值之和。图 4 是该性质的示意。

性质 5：$Z_{i,j,k}=Z_{i,0,k}\times P_{i,j,k}\quad(k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0)$。

其中 $P_{i,j,k}$是以乘积因子的形式隐藏于三项棱锥中第 k 层三角形网格中的第 i 行第 j 列的二项展开式系数。这些系数构成一个以 a^k 项所在格点为顶点的贾宪三角（图 5）。

证明：依定义 $P_{i,j,k}=C_i^j$，故

$Z_{i,0,k}\times P_{i,j,k}=C_k^iC_i^0\times C_i^j=C_k^iC_i^j=Z_{i,j,k}\qquad(k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0)$。

证毕。

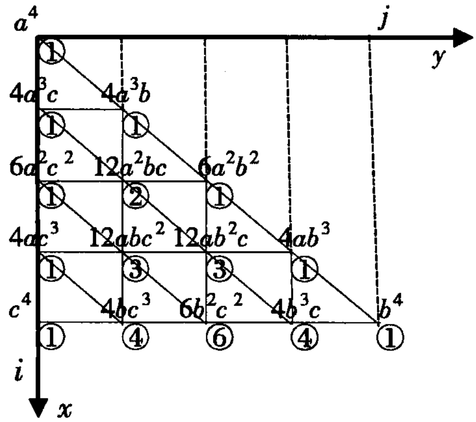


图 5　$n=k=4$ 时三项展开式的网格，其中带圈的
数构成了一个隐藏着的贾宪三角

根据性质 2，可知以乘积因子的形式隐藏于第 k 层网格中的贾宪三角共有三个，另外两个分别以 b^k 和 c^k 项所在格点为顶点。对这两个贾宪三角进行坐标变换后，可以得到与性质 5 等值的 5 个表达式，一共 6 式：

①$Z_{i,j,k}=Z_{i,0,k}\times P_{i,j,k}=C_k^iC_i^j$

②$Z_{i,j,k}=Z_{i,i,k}\times P_{i,j,k}=C_k^iC_i^j$

③$Z_{i,j,k}=Z_{j,j,k}\times P_{k-j,k-i,k}=C_k^jC_{k-j}^{k-i}$

④$Z_{i,j,k}=Z_{k,j,k}\times P_{k-j,k-i,k}=C_k^jC_{k-j}^{k-i}$

⑤$Z_{i,j,k}=Z_{k,k+j-i,k}\times P_{k+j-i,j,k}=C_k^{k+j-i}C_{k+j-i}^j$

⑥$Z_{i,j,k}=Z_{i-j,0,k}\times P_{k+j-i,j,k}=C_k^{i-j}C_{k+j-i}^j$

其中 $k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0$。

性质 6：$Z_{i,j,k}=C_k^iC_i^j=C_k^iC_i^{i-j}=C_k^jC_{k-j}^{i-j}=C_k^jC_{k-j}^{k-i}=C_k^{i-j}C_{k+j-i}^j=C_k^{i-j}C_{k+j-i}^{k-i}=C_k^{k-i}C_i^j=C_k^{k-i}C_i^{i-j}=C_k^{k-j}C_{k-j}^{i-j}=C_k^{k-j}C_{k-j}^{k-i}=C_k^{k+j-i}C_{k+j-i}^j=C_k^{k+j-i}C_{k+j-i}^{k-i}\quad(k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0)$。

证明：参看图 6，根据性质 2，在第 k 层格点中，与 $Z_{i,j,k}$等值的点位最多有 A、B、C、D、E、F 共 6 个（包含了 $i=2j$ 时最少为 3 个的情形），即：

$Z_{i,j,k}=Z_{i,i-j,k}=Z_{k+j-i,k-i,k}=Z_{k-j,k-i,k}=Z_{k-j,i-j,k}=Z_{k+j-i,j,k}\quad(k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0)$。

根据性质 5，在对 $P_{i,j,k}$进行坐标变换后，这 6 个系数中的每一个都可以用 6 个类似于性质 5 的乘积形式表出，因而共有 $6\times 6=36$ 种不同的表达式，且它们的值都等于

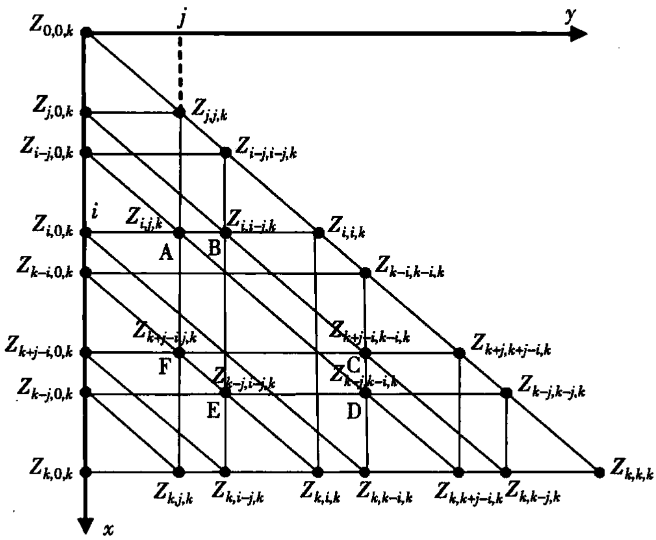


图 6　点位 A、B、C、D、E、F 处的系数值都等于 $Z_{i,j,k}$

$Z_{i,j,k}$。由于较为繁琐，故未逐一列出。然而，在将它们写成组合数的形式后，会出现不少重复的情形。例如性质 5 中的①、②两式，以及③、④两式都是重复的情形。其中，不重复的组合数表达式共有本性质列出的 12 个。

证毕。

该性质中 $C_k^iC_i^j=C_k^iC_i^{i-j}$ 和 $C_k^iC_i^j=C_k^iC_{k-j}^{i-j}$ 是组合数理论中熟知的结论，而该性质给出的 12 个等式应当是 $k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0$ 条件下所有可能出现的情形。

当 $i=2j$ 时，对应于第 K 层格点中与 $Z_{i,j,k}$ 等值的点位只有 3 个的情形。将 $i-j=j$ 代入上述 12 个表达式中，可以得到 6 个不重复的组合数表达式如下：

$$Z_{i,j,k}=C_k^iC_i^j=C_k^iC_{k-j}^{k-i}=C_k^{k-i}C_i^j=C_k^{k-j}C_{k-j}^{k-i}=C_k^iC_{k-j}^j=C_k^{k-j}C_{k-j}^j\quad(k\geqslant i=2j\geqslant 0)。$$

性质 7：$\sum\limits_{j=0}^{i}C_k^iC_i^j=C_k^i2^i\quad(k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0)$。

证明：
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{i}C_k^iC_i^j&=C_k^iC_i^0+C_k^iC_i^1+\cdots\cdots+C_k^iC_i^j+\cdots+C_k^iC_i^i\\&=C_k^i(C_i^0+C_i^1+\cdots\cdots+C_i^j+\cdots+C_i^i)\\&=C_k^i2^i\quad(k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0)。\end{aligned}$$

证毕。

事实上，根据性质 5 和性质 6，还可以写出下述组合数等式：

$$\sum_{j=0}^{i}C_k^{k+j-i}C_{k+j-i}^{k-i}=C_k^{k-i}C_{k-i}^{k-i}+C_k^{k-i+1}C_{k-i+j}^{k-i}+\cdots+C_k^{k-i+j}C_{k-i+j}^{k-i}+\cdots+C_k^kC_k^{k-i}=C_k^i2^i,$$

$$\sum_{j=0}^{i}C_k^{k+j-i}C_{k+j-i}^{j}=C_k^{k-i}C_{k-i}^{0}+C_k^{k-i+1}C_{k-i+1}^{1}+\cdots+C_k^{k-i+j}C_{k-i+j}^{j}+\cdots+C_k^kC_k^{i}=C_k^i2^i。$$

其中 $k\geqslant i\geqslant j\geqslant 0$。

笔者查阅资料后发现《数学通报》2001 年第 9 期曾载文有类似研究，[1] 文中(D)、(E)

两式为：

(D) $C_n^m C_m^m + C_n^{m+1} C_{m+1}^m + \cdots + C_n^{m+k} C_{m+k}^m + \cdots + C_n^n C_n^m = C_n^m 2^{n-m}$

(E) $C_n^m C_m^0 + C_n^{m+1} C_{m+1}^1 + \cdots + C_n^{m+k} C_{m+k}^k + \cdots + C_n^n C_n^{n-m} = C_n^m 2^{n-m}$

显然，这两式须满足 $m+k \leqslant n$ 的条件，可知 k 的取值范围是 $k=0\sim(n-m)$，相对其 $n \geqslant m \geqslant k \geqslant 0$ 的基本条件而言，不具一般性。可见，这是两个另有附加限制条件的等式。

4. 三项棱锥中三项展开式系数的递推关系

递推关系 1：根据性质 3 和性质 4，可以得到

$Z_{i,j,k} = Z_{i,j,k-1} + Z_{i-1,j,k-1} + Z_{i-1,j-1,k-1} \quad (k>i>j>0)$

边界条件为：$Z_{0,0,0}=1$，$Z_{0,0,k}=1$，$Z_{k,0,k}=1$，

$Z_{k,k,k}=1 \quad (k \geqslant 0)$；

$Z_{i,0,k} = Z_{i,0,k-1} + Z_{i-1,0,k-1} \quad (k>i>j=0)$，

$Z_{k,j,k} = Z_{i-1,j,i-1} + Z_{i-1,j-1,i-1} \quad (k=i>j>0)$，

$Z_{j,j,k} = Z_{j,j,k-1} + Z_{j-1,j-1,k-1} \quad (k>i=j>0)$。

递推关系 2：根据性质 3 和性质 5，可以得到

$Z_{i,j,k} = (Z_{i,0,k-1} + Z_{i-1,0,k-1}) \times (P_{i-1,j,k} + P_{i-1,j-1,k}) \quad (k>i>j>0)$。

边界条件为：$Z_{0,0,0}=1$，$Z_{0,0,k}=1$，$Z_{k,0,k}=1 \quad (k \geqslant 0)$；

$P_{0,0,k}=1 \quad (k>i=j=0)$，$P_{i,0,k}=1 \quad (k \geqslant i>j=0)$，

$P_{i,i,k}=1 \quad (k \geqslant i=j>0)$。

参考文献：

[1] 赵生筱．三项式定理及其三项式系数塔．数学通报，2001（9）：32～33